Wignerの定理の証明

木原浩貴

2009年12月7日

概要

量子物理学の基礎にある Wigner(ウィグナー) の定理をアフィン幾何学やユークリッド幾何学の既知の定理を利用して証明する。

■本書を読む上で必要な予備知識　ヒルベルト空間の定義と内積に関する基本的性質 (Schwartz の不等式など) は既知とする。あとは抽象的ベクトル空間論の初歩的な知識だけで読めるように書いたつもりである。

■ヒルベルト空間　本書でヒルベルト空間といえば、特に断りがなければ、それは複素数体 $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間を指す。

ヒルベルト空間は H, H' などで表される。例外的に 1 次元ヒルベルト空間にかぎって小文字 h, h' などで表すこともある。ヒルベルト空間の元はラテン小文字 $a, b, \ldots$ で書かれ、複素係数はギリシャ小文字 $\lambda, \mu, \ldots$ で書かれる。これらの文字に添字や $', ''$ がつくこともある。複素数 λ の共役複素数は $\overline{\lambda}$ で書かれる。

H の内積 $\langle a,\ b\rangle$ は物理での習慣に従い、右側線形であると約束する：$\langle a,\ \lambda b\rangle = \lambda\langle a,\ b\rangle$。

■ヒルベルト空間の写像　以下で、$U : H \to H'$ (写像) とする。

U は $\|Ua\| = \|a\|$ を満たすとき**等長 (isometric)** であるという。

U は $\langle a,\ b\rangle = \langle Ua,\ Ub\rangle$ か $\overline{\langle a,\ b\rangle} = \langle Ua,\ Ub\rangle$ のどちらかを満たすならば等長である。

逆に U は等長で線形ならば $\langle a,\ b\rangle = \langle Ua,\ Ub\rangle$ を満たし、等長で反線形ならば $\overline{\langle a,\ b\rangle} = \langle Ua,\ Ub\rangle$ を満たす。このことは偏極恒等式

$$4\langle a,\ b\rangle = \|a+b\|^2 - \|a-b\|^2 + i\left(\|ia+b\|^2 - \|ia-b\|^2\right)$$

から明らかである。

等長・(反) 線形写像は単射である。

とくに全射 $U : H \to H'$ は等長・線形写像のとき**ユニタリ写像**といい、等長・反線形写像のとき**反ユニタリ写像**という。(反) ユニタリ写像は双射で、逆写像 $U^{-1} : H' \to H$ はまた (反) ユニタリ写像である。

H の H 自身への (反) ユニタリ写像をとくに H 上の **(反) ユニタリ作用素**という。H 上のユニタリ作用素と反ユニタリ作用素の全体は群を成し、そのなかでユニタリ作用素全体は正規部分群を成す。

■ヒルベルト空間の射影空間　$*\mathbb{C} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $*H = H \setminus \{0\}$ とする。$a, b \in *H$ の関係 $a \sim b$ を $a = \lambda b$ $(\exists\lambda \in *\mathbb{C})$ で定義すると、これは同値関係である。a の同値類を $[a]$ と書く。同値類の集合 (商集合) $\mathsf{P}(H) = *H/\sim$ を H の**射影空間**と呼び、$\pi : *H \to \mathsf{P}(H), a \mapsto [a]$ をカノニカルな写像 (全射) という。$\mathsf{P}(H)$ の元は H の**射線 (ray)** と呼ばれ、量子系の状態 (state) を表す。射線 $\mathsf{a} = [a]$ に対して、a は a の**代表元**と呼ばれる。とくに $\|a\| = 1$ のとき**単位代表元**と呼ばれる。単位代表元はつねに存在し、単位長さの複素係数 (これを物理では**位相因子**と呼ぶ) を別にして一意に定まる。

射線 a, b はそれぞれの代表元 a, b が一次従属のとき、かつそのときに限って相等しい。

■射線の内積、遷移確率　射線 $\mathsf{a} = [a], \mathsf{b} = [b]$ に対し非負実数

$$\frac{\left|\langle a,\ b\rangle\right|}{\|a\|\|b\|}$$

は代表元 a, b のとり方に依らないから、これを a と b の**内積**と呼び、[a, b] と書く。とくに a, b を単位代表元とすれば、$[\mathsf{a},\ \mathsf{b}] = \left|\langle a,\ b\rangle\right|$ である。

内積の二乗 $[\mathsf{a},\ \mathsf{b}]^2$ は状態 a から状態 b への**遷移確率**を意味する。

定理 1. 任意の射線 a, b に対し $[\mathsf{a},\ \mathsf{b}] \leq 1$ が成り立つ。等号は a = b のときに限り成立する。

証明 $\mathsf{a} = [a], \mathsf{b} = [b]$ とする。定理の主張は、Schwartz の不等式 $\left|\langle a,\ b\rangle\right| \leq \|a\|\|b\|$ から明らかであろう。
▮

■射影空間の写像　$T : \mathsf{P}(H) \to \mathsf{P}(H')$ (写像) とする。T は $[\mathsf{a},\ \mathsf{b}] = [T\mathsf{a},\ T\mathsf{b}]$ を満たすとき、**射線の内積を保つ**という。これは物理的にいえば状態のあいだの遷移確率を保つことを意味する。射線の内積を保つ写像は単射である。

さて U が等長・(反) 線形写像ならば

$$T[a] = [Ua]$$

で定義される写像 $T : \mathsf{P}(H) \to \mathsf{P}(H')$ が射線の内積を保つことは明らかである。Wigner の定理はこれの逆が成立することを主張する。すなわち

Wigner の定理. $\dim H \geq 2$ とする。写像 $T : \mathsf{P}(H) \to \mathsf{P}(H')$ は射線の内積を保つとする。このとき、ある等長・(反) 線形写像 $U : H \to H'$ で

$$T[a] = [Ua] \quad (a \in *H)$$

を満たすものが存在する (等長・(反) 線形に限らず、一般に上の関係を満たす写像 U は T と**両立する**という)。しかも T と両立する等長・(反) 線形写像は位相因子を別にして一意に決定される。

注意. $\dim H = 1$ の場合、Wigner の定理は証明を要しない。すなわちこの場合、$\mathsf{P}(H)$ は唯一の射線 a から成っており、e を a の単位代表元、e' を $T\mathsf{a}$ の単位代表元として、等長・線形写像 $U : \lambda e \mapsto \lambda e'$ と等長・反線形写像 $Y : \lambda e \mapsto \overline{\lambda} e'$ はどちらも T と両立できることがわかる。e' の選定には位相因子分の不定性がある。したがって T と両立する等長・線形写像、等長・反線形写像それぞれにも位相因子分の不定性がある。

以下、Wigner の定理を証明するが、我々はこのために、既に知られているアフィン幾何やユークリッド幾何の定理を利用したいと思う。そこでアフィン空間の定義から始める。

■アフィン空間　$K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ とする。空でない集合 Π に K 上のベクトル空間 X が、加法群として自由にかつ推移的に作用しているものとする。すなわち X の Π への作用を $(A, x) \in \Pi \times X \mapsto A + x \in \Pi$ と書くと、自由で推移的な作用とは、任意の 2 点 $A, B \in \Pi$ に対し $A + x = B$ を満たすベクトル $x \in X$ が唯一つあることを意味する (このベクトル x を $B - A$ で表す)。このとき、$\Pi = (\Pi, X)$ を K 上の**アフィン空間**と呼ぶ。Π の**次元**とは X の次元である。とくに 1 次元アフィン空間は**直線**と呼ばれる。

X の 1 次元部分空間 Kx $(x \neq 0)$ を Π の一点 A に作用させたときの軌道 $A + Kx = \left\{ A + \lambda x \;\middle|\; \lambda \in K \right\}$ は直線である。これらを Π 上の**直線**と呼ぶ。

以下の命題を証明なしで述べる。

命題 2. *Π 上の異なる 2 点 A, B を与えたとき、A, B を通る直線が唯一つある。$A + K(B - A)$ がそれである (これを直線 AB と呼ぶ)。*

命題 3. *$x, y \in X$, $x \neq 0$ とする。任意の $O \in \Pi$ に対し $A = O + x$, $B = O + y$ とおく。すると x と y が一次従属のとき、かつそのときに限って B は直線 OA 上にある。*

$\Pi = (\Pi, X)$, $\Pi' = (\Pi', X')$ をアフィン空間とし、$\varphi : \Pi \to \Pi'$ (写像) とする。

φ は次の条件を満たすとき、**幾何的アフィン写像**であるという：

1. φ は単射である。
2. φ は Π 上の直線を Π' 上の直線の上に写す、すなわち Π 上の任意の直線 l の像 $\varphi(l)$ が Π' 上の直線となる。

次の命題も証明なしで述べる：

命題 4. *$A, B \in \Pi$ を異なる 2 点とし、$A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$ とする。幾何的アフィン写像 φ は直線 AB を直線 $A'B'$ の上に写す。*

$\theta : K \to K$ を自己同型とする：$\theta(\lambda + \mu) = \theta(\lambda) + \theta(\mu)$, $\theta(\lambda\mu) = \theta(\lambda)\theta(\mu)$, $\theta(1) = 1$。写像 $L : X \to X'$ は $L(x + y) = L(x) + L(y)$, $L(\lambda x) = \theta(\lambda)L(x)$ を満たすとき、**θ-線形**であるという。

注意. $K = \mathbb{R}$ の場合、自己同型は恒等作用素 $\theta(\lambda) = \lambda$ に限られる。$K = \mathbb{C}$ の場合、自己同型には恒等作用素のほかに共役作用素 $\theta(\lambda) = \overline{\lambda}$ がある。とくに連続な自己同型はこの二つに限られる。

$O \in \Pi$ とする。φ は θ-線形な単射 $L : X \to X'$ を用いて $\varphi(O + x) = \varphi(O) + L(x)$ と表すことができるとき、**アフィン写像**であるという。この命題は $O \in \Pi$ に依存しないことが容易に確かめられる。ゆえに φ がアフィン写像ならば、“任意の” $O \in \Pi$ と $x \in X$ に対して上式の関係が成り立つ。

命題 5. *アフィン写像は幾何的アフィン写像である。*

これもほとんど証明を要しまい。

さて上の逆が成り立つかが問題なのだが、$\dim \Pi \geq 2$ ならば成り立つのである。

定理 6. *$\Pi = (\Pi, X)$, $\Pi' = (\Pi', X')$ を K 上のアフィン空間とし、$\varphi : \Pi \to \Pi'$ を幾何的アフィン写像とする。$\dim \Pi \geq 2$ ならば φ はアフィン写像である。すなわち、K の自己同型 θ と θ-線形な単射 $L : X \to X'$ があって $\varphi(O + x) = \varphi(O) + L(x)$ となる。*

証明 証明は長くなるから、これをいくつかのステップに分けて行う。

(Step 1) $O \in \Pi$ を任意の点とし、しばらくこれを固定して考える。写像 $L_O : X \to X'$ を

$$L_O(x) = \varphi(O + x) - \varphi(O)$$

で定義する。定義から明らかに

$$L_O(0) = 0 \tag{1}$$

である。また φ は単射だから

$$L_O(x) \neq 0 \quad (x \neq 0)$$

である。
さらに $x \neq 0$ ならば任意の $\lambda \in K$ に対して、

$$L_O(\lambda x) = \lambda' L_O(x)$$

を満たす $\lambda' \in K$ が唯一つ存在し、反対に任意の $\lambda' \in K$ に対して上の式を満たす $\lambda \in K$ が存在する。$x, y \in X$ が一次独立ならば $L_O(x), L_O(y) \in X'$ も一次独立である。これらのことは幾何的アフィン写像の定義から容易に導ける。
(Step 2)　以下、とくに断りがなければ x', y' 等々はそれぞれ $L_O(x), L_O(y)$ 等々を意味し、A', B' 等々はそれぞれ $\varphi(A), \varphi(B)$ 等々を意味する。
一次独立なベクトルの組 $x, y \in X$ に対し、Δ を x と y の張る X の部分空間とする：$\Delta = \left\{ \lambda x + \mu y \;\middle|\; \lambda, \mu \in K \right\}$。$\Delta$ から $\lambda + \mu = 0$ となる元 $\lambda x + \mu y$ を除いたものを Δ_1 と書く。同様に Δ' を x' と y' の張る X' の部分空間とする。このとき、$L_O(\Delta_1) \subset \Delta'$ であることを示そう。$A = O + x, B = O + y$ とおく。任意の $z = \lambda x + \mu y \in \Delta_1$ に対し $u = (\lambda + \mu)^{-1} z$, $P = O + z$, $Q = O + u$ とおくと、Q は直線 AB 上の点だから Q' は直線 $A'B'$ 上の点である。すなわち $u' = (1 - \tau)x' + \tau y'$。また P は直線 OQ 上の点だから P' は直線 $O'Q'$ 上の点：$z' = \lambda u'$。ゆえに $z' = \lambda(1 - \tau)x' + \lambda\tau y' \in \Delta'$ である。
(Step 3)　任意の $x, y \in X$ に対し

$$L_O(x + y) = L_O(x) + L_O(y) \tag{2}$$

が成り立つことを示す。$x = 0$ または $y = 0$ の場合は (1) から明らかだから $x \neq 0$ かつ $y \neq 0$ の場合だけを考えればよい。そこでまず x, y が一次独立の場合を考える。$A = O + x, B = O + y, C = O + z$ $(z = x + y)$ とおき、$x'' = C' - B', y'' = C' - A'$ とすると、$C' - O' = x' + y'' = x'' + y'$。ところが前の *Step* で示したことから $C' - O' = \lambda x' + \mu y'$。この二つから $y'' = (\lambda - 1)x' + \mu y'$ が出てくるが、もし $\lambda \neq 1$ ならば直線 $O'B'$ と直線 $A'C'$ は交差することになり、矛盾である。ゆえに $\lambda = 1$ でなければならない。同様に $\mu = 1$ となる。すなわち $z' = C' - O' = x' + y'$.
次に x と y が一次従属の場合を考える。$z \in X$ を x と z が一次独立なようにとる ($\dim X \geq 2$ だからそれが可能である)。すると $x + y \neq 0$ ならば $x + y$ と z が一次独立だから $L_O(x + y + z) = L_O(x + y) + L_O(z)$ である ($x + y = 0$ のときはこの式は自明である)。また x と $y + z$、y と z が各々一次独立だから $L_O(x + y + z) = L_O(x) + L_O(y + z) = L_O(x) + L_O(y) + L_O(z)$。ゆえに (2) が成り立つ。
さて、ここまでは O を固定して考えてきたが、O は Π 上の任意の点であったので、任意の他の点 O_1 に対しても $L_{O_1} : X \to X'$ が定義される。ところが L_O の加法性から $L_O = L_{O_1}$ が導かれる (詳細は読者に委ねる) ので、以下では $L = L_O$ と書くことにする。
(ここまでのまとめ)

- 任意の $O \in \Pi$ と $x \in X$ に対し

$$\varphi(O + x) = \varphi(O) + L(x) \tag{3}$$

　が成り立つ。

- 任意の $x, y \in X$ に対し

$$L(x+y) = L(x) + L(y) \tag{4}$$

が成り立つ。
- $x \neq 0$ ならば $L(x) \neq 0$。
- x と y が一次独立ならば $L(x)$ と $L(y)$ も一次独立である。
- $x \in X, x \neq 0$ ならば任意の $\lambda \in K$ に対し、$\lambda' \in K$ が唯一つ決まって

$$L(\lambda x) = \lambda' L(x). \tag{5}$$

反対に任意の $\lambda' \in K$ に対し、(5) を満たす $\lambda \in K$ がある。

(Step 4)　上の (5) の λ' を $\theta_x(\lambda)$ と書く。すなわち $x \in X, x \neq 0$ に対し関数 $\theta_x : K \to K$ を

$$L(\lambda x) = \theta_x(\lambda) L(x)$$

で定義する。任意の $x, y \in X$, $x \neq 0$, $y \neq 0$ に対し $\theta_x = \theta_y$ を示そう。はじめに x, y が一次独立の場合を考える。$z = x + y$ とおく。L の加法性から $L(\lambda z) = \theta_z(\lambda)L(z) = \theta_z(\lambda)L(x) + \theta_z(\lambda)L(y)$、および $L(\lambda z) = L(\lambda x) + L(\lambda y) = \theta_x(\lambda)L(x) + \theta_y(\lambda)L(y)$。$L(x), L(y)$ は一次独立だから係数を比較して $\theta_x(\lambda) = \theta_z(\lambda) = \theta_y(\lambda)$ を得る。すなわち $\theta_x = \theta_y$。
x と y が一次従属の場合は z を x と z が (したがって y と z も) 一次独立なるように選ぶと $\theta_x = \theta_z = \theta_y$。
そこで以下、$\theta = \theta_x$ と書く。
(まとめ) 関数 $\theta : K \to K$ が L から定まり、任意の $x \in X, x \neq 0$ と $\lambda \in K$ に対し、

$$L(\lambda x) = \theta(\lambda) L(x) \tag{6}$$

が成り立つ。
(Step 5)　(6) で定義された関数 $\theta : K \to K$ は K への全射である (*Step3* のまとめの最後に述べたことから分かる)。
任意の λ, μ に対し

$$\theta(\lambda + \mu) = \theta(\lambda) + \theta(\mu) \tag{7}$$

を示そう。$x \in X$, $x \neq 0$ をひとつとると、$L((\lambda + \mu)x) = \theta(\lambda + \mu)L(x)$。$L$ の加法性から $L((\lambda + \mu)x) = L(\lambda x) + L(\mu x) = (\theta(\lambda) + \theta(\mu))L(x)$。係数を比較して (7) を得る。
つぎに

$$\theta(\lambda\mu) = \theta(\lambda)\theta(\mu) \tag{8}$$

を示そう。$\mu = 0$ の場合は自明だから $\mu \neq 0$ と仮定する。$x \neq 0$ をひとつとると、$L((\lambda\mu)x) = \theta(\lambda\mu)L(x)$、$L((\lambda\mu)x) = L(\lambda(\mu x)) = \theta(\lambda)\theta(\mu)L(x)$。係数を比較して (8) を得る。
最後に

$$\theta(1) = 1 \tag{9}$$

を示そう。$x \neq 0$ をひとつとって、$L(x) = L(1x) = \theta(1)L(x)$。係数を比較して (9) を得る。
(7)、(8)、(9) から θ が K の自己同型であることが分かった。
(Final Step)　*Step 3* で示した (4) と (6) は L が θ-線形であることを示している。さらに $x \neq 0 \Rightarrow L(x) \neq 0$ は L が単射であることを示す。したがって (3) から φ はアフィン写像である。 ∎

■ユークリッド空間　X が正定値内積をもち、ノルムに関して完備な実ベクトル空間の場合、Π は**ユークリッド空間**と呼ばれる。このとき、Π 上の任意の 2 点 A, B のあいだには距離 $d(A, B)$ が $d(A, B) = \|A - B\|$ で定義される。

Π, Π' をユークリッド空間とし、$\varphi : \Pi \to \Pi'$ とする。φ は任意の 2 点のあいだの距離を変えないとき、すなわち $\|A - B\| = \|\varphi(A) - \varphi(B)\|$ を満たすとき、**等長写像**であるという。

φ は直交写像 (内積を保つ線形写像) $U : X \to X'$ を用いて $\varphi(O + x) = \varphi(O) + Ux$ と表されるとき、**合同写像**という。合同写像は明らかに等長写像であるが、この場合、逆も成り立つ。

定理 7. $\Pi = (\Pi, X), \Pi' = (\Pi', X')$ をユークリッド空間とし、$\varphi : \Pi \to \Pi'$ とする。φ が等長ならば、φ は合同写像である。

証明 $O \in \Pi$ をひとつ決め、$U : X \to X'$ を $U(x) = \varphi(O + x) - \varphi(O)$ で定義する。明らかに $U(0) = 0$ かつ、$\|U(x) - U(y)\| = \|x - y\|$ が成り立つ。ゆえに $\|U(x)\| = \|x\|$。これらと実内積空間で成り立つ恒等式 $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ および $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 4(x, y)$ を用いて内積の不変性 $(Ux, Uy) = (x, y)$ を得る。内積の不変性からはまた $\|U(x + \lambda y) - U(x) - \lambda U(y)\|^2 = 0$ が導かれ、ゆえに $U(x + \lambda y) - U(x) - \lambda U(y) = 0$ となって U は線形である。したがって U は内積を保つ線形写像 (直交写像) で、$\varphi(O + x) = \varphi(O) + U(x)$ だから φ は合同写像である。 ▮

■幾何的ヒルベルト空間　さて X がヒルベルト空間 H の場合、アフィン空間 $\Pi = (\Pi, H)$ を**幾何的ヒルベルト空間**と本書では呼ぶ。ユークリッド空間と同じ様に、幾何的ヒルベルト空間 Π の任意の 2 点 A, B のあいだには距離 $d(A, B)$ が定義される：$d(A, B) = \|A - B\|$.

$\Pi = (\Pi, H), \Pi' = (\Pi', H')$ を幾何的ヒルベルト空間とし、$\varphi : \Pi \to \Pi'$ を写像とする。

φ は任意の 2 点の間の距離を変えないとき、すなわち $\|A - B\| = \|\varphi(A) - \varphi(B)\|$ を満たすとき、**等長写像**であるという。

φ は等長・(反) 線形写像 $U : H \to H'$ を用いて $\varphi(O + x) = \varphi(O) + U(x)$ と表されるとき、**合同写像**と呼ぶ。

合同写像は明らかに等長写像であるが、この場合、逆は成立しない (反例がある)。

しかし次の補題とそれにつづく定理が成り立つ。

補題 8. $l = (l, h), l' = (l', h')$ を 1 次元ヒルベルト空間とする。写像 $\varphi : l \to l'$ は等長であれば、合同写像である。とくに φ による l の像 $\varphi(l)$ は l' に一致する。

証明 複素 1 次元ベクトル空間 h は係数を実数体に制限することで実 2 次元ベクトル空間 h_R と見なすことができる。虚数単位 i を掛ける操作は h_R のなかでは $J^2 = -1$ なる線形作用素 J である：$Jx = ix$。

さらに h_R の内積 (x, y) を $(x, y) = \mathrm{Re}\langle x, y\rangle$ で定義すれば、これは正定値で、$(Jx, y) = -(Jy, x)$ を満たす。ここから J が直交変換であること、h の任意の単位ベクトル e に対し e, Je が h_R の正規直交基底であることがわかる。

また f を h の別の任意の単位ベクトルとすると e, Je と f, Jf は同じ向きをもっている (変換の行列式が正値をとる) ことが確かめられる。すなわち e, Je の向きを正の向きと定義することにより h_R は向きづけられる。

ゆえに l は向きづけられた 2 次元ユークリッド空間と見なすことができる。これをもとの l と区別して l_R と書く：$l_R = (l_R, h_R)$。$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = (x, x)$ だから l 上の 2 点の距離は l と l_R とで変わらない。

同様のことが、l' に対しても成り立ち、$l'_R = (l'_R, h'_R)$ が定義される。
さて φ は等長写像と仮定されているから、既に証明されたように φ はユークリッド空間の合同写像である。すなわち直交写像 $U : l_R \to l'_R$ を用いて $\varphi(O+x) = \varphi(O) + Ux$ と表すことができる。
J および U を h_R と h'_R の基底 $e, Je\,;\, e', Je'$ に関して行列で表示し、計算すれば分かるように

$$UJ = \pm JU$$

が成り立つ (符号は U が向きを保つときが $+$、向きを変えるときが $-$)。これと

$$\langle x,\ y\rangle = (x,\ y) + i(Jx,\ y)$$

とから U が等長・(反) 線形であることを示すのは容易い (U が向きを保つときに等長・線形、向きを変えるときに等長・反線形)。
したがって、φ は幾何的ヒルベルト空間のあいだの合同写像である。
U は h' への全射だから φ も l' への全射となる：$\varphi(l) = l'$。 ▮

定理 9. $\Pi = (\Pi, H)$, $\Pi' = (\Pi', H')$ を幾何的ヒルベルト空間とし、$\varphi : \Pi \to \Pi'$ を写像とする。次の条件を満たすとき、φ は合同写像である。

1. φ は Π の直線を Π' の直線のなかに写す。すなわち Π の任意の直線 l に対して、Π' の直線 l' があり、$\varphi(l) \subset l'$。
2. φ は等長である。

証明 はじめに φ は等長であるとの仮定から、φ は単射であることを確認する。
l を Π の任意の直線とする。仮定により Π' の直線 l' があって $\varphi(l) \subset l'$。そこで φ を l に制限したものを φ_l と書くと、φ_l は l から l' への等長写像だから補題 8 により φ_l は合同写像で、$\varphi(l) = l'$ である。したがってとくに φ は直線を直線の上に写す幾何的アフィン写像であることが分かる。
さて $\dim \Pi = 1$ の場合、補題 8 により φ は合同写像である。
$\dim H \geq 2$ の場合、定理 6 により φ はアフィン写像

$$\varphi(O+x) = \varphi(O) + U(x)$$

である。すなわち $U : H \to H'$ は $\mathbb{C}$ のある自己同型 θ に関しての θ-線形な単射である。
ところが φ は等長写像だから U は

$$\| U(x) \| = \| x \| \quad (x \in H) \tag{10}$$

で等長である。U の等長性はまた

$$|\theta(\lambda)| = |\lambda| \quad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{11}$$

を意味する。すなわち $\theta : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は連続な自己同型である。
ゆえに θ は次の何れかである：

$$\theta(\lambda) = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{C})$$
$$\theta(\lambda) = \overline{\lambda} \quad (\lambda \in \mathbb{C}).$$

$\theta(\lambda) = \lambda$ のとき U は等長・線形写像である。$\theta(\lambda) = \overline{\lambda}$ のとき U は等長・反線形写像である。
したがって φ は幾何ヒルベルト空間の合同写像である。 ▮

■**ヒルベルト空間の分解とその意味**　e を H の単位ベクトルとし、

$$\mathcal{P} = \left\{ a \in H \,\middle|\, \langle e,\ a\rangle = 1 \right\}, \quad H_0 = \left\{ x \in H \,\middle|\, \langle e,\ x\rangle = 0 \right\}$$

とおく。$\mathcal{P}$ は H_0 による自明な作用：$(a, x) \in \mathcal{P} \times H_0 \mapsto a + x \in \mathcal{P}$ により幾何的ヒルベルト空間であることが確かめられる。

$\mathcal{P} = (\mathcal{P}, H_0)$ を e を使った H の**分解**と本書では呼ぶ。

明らかに $\mathcal{P} \subset *H$ であり、任意の $a, b \in \mathcal{P}$ に対し $[a] = [b]$ ならば $a = b$ である。つまり π の $\mathcal{P}$ への制限 $a \in \mathcal{P} \mapsto [a] \in \mathsf{P}(H)$ は単射で、$\mathcal{P}$ は $\pi(\mathcal{P})$ と同一視することが可能である：$\mathcal{P} \approx \pi(\mathcal{P})$。

$\mathsf{P}(H)$ は $\mathcal{P}$ と $\mathsf{P}(H_0)$ の集合的直和と見なすことができる：

$$\mathsf{P}(H) \approx \mathcal{P} \cup' \mathsf{P}(H_0)$$

実際、任意の $\mathsf{a} \in \mathsf{P}(H)$ に対し、その代表元 a は $\langle e,\ a\rangle = 0$ か $\langle e,\ a\rangle \neq 0$ のどちらかを満たす。もし $\langle e,\ a\rangle = 0$ ならば $\mathsf{a} \in \mathsf{P}(H_0)$ であるし、$\langle e,\ a\rangle \neq 0$ ならば $\lambda = \langle e,\ a\rangle, a_2 = \lambda^{-1}a$ とおくと $a_2 \in \mathcal{P}$。よって $\mathsf{a} = [a] = [a_2] \in \pi(\mathcal{P}) \approx \mathcal{P}$ である。

注. $\mathsf{P}(H_0)$ の幾何的意味は、これが $\mathcal{P}$ の "無限遠点" の集合であることである。

■**等長・(反) 線形写像の構成**　以下の議論で、$T : \mathsf{P}(H) \to \mathsf{P}(H')$ は射線の内積を保つ写像とする。

e を H の単位ベクトルとし、e' を $T[e] = [e']$ を満たす H' の単位ベクトルとする。

H, H' をそれぞれ e, e' を使って $(\mathcal{P}, H_0), (\mathcal{P}', H'_0)$ と分解する。

補題 10. 任意の $a \in \mathcal{P}$ に対し、

$$T[a] = [a']$$

を満たす $a' \in \mathcal{P}'$ が唯一つ存在する。このとき

$$\|a\| = \|a'\| \tag{12}$$

が成り立ち、さらに $x = a - e (\in H_0),\ x' = a' - e' (\in H'_0)$ とおくと

$$T[x] = [x'] \quad (\,if\ x \neq 0), \tag{13}$$

$$\|x\| = \|x'\| \tag{14}$$

も成り立つ。

証明 $T[a] = [a''], \|a\| = \|a''\|$ を満たす ベクトル a'' をとると、T は射線の内積を保つから $\left|\langle e',\ a''\rangle\right| = \left|\langle e,\ a\rangle\right| = 1$。そこで $\lambda = \langle a'',\ e'\rangle$、$a' = \lambda a''$ とおくと $\langle e',\ a'\rangle = 1, [a'] = [a'']$。こうして条件を満たす a' の存在が明らかとなった。一方 a' の一意性のほうは $a \in \mathcal{P} \mapsto [a] \in \mathsf{P}(H)$ が単射であることから明らかである。

さらに上の a'' に関して $\|a'\| = \|a''\|$ が成り立つから、$\|a\| = \|a'\|$ である。

これと三平方の定理 $\|a\|^2 = 1 + \|x\|^2, \|a'\|^2 = 1 + \|x'\|^2$ から $\|x\| = \|x'\|$ が出てくる。

$x \neq 0$ の場合、$T[x] = [x''], \|x\| = \|x''\|$ を満たす x'' をとると $0 = \left|\langle e,\ x\rangle\right| = \left|\langle e',\ x''\rangle\right|$。すなわち $\langle e',\ x''\rangle = 0$。よって $\left|\langle x',\ x''\rangle\right| = \left|\langle a',\ x''\rangle\right| = \left|\langle a,\ x\rangle\right| = \|x\|^2 = \|x'\|\|x''\|$。ゆえに定理 1 から $[x'] = [x'']$ である。したがって $T[x] = [x']$ となる。

∎

上の補題において定義される写像 $a \in \mathcal{P} \mapsto a' \in \mathcal{P}'$ を φ と書き、写像 $x \in H_0 \mapsto x' \in H_0'$ を V と書く (つまり V は $V(x) = \varphi(e+x) - e'$ で定義される写像)。φ と V は定義から明らかに、次の関係式を満たす：

$$\varphi(e+x) = e' + V(x) \quad (x \in H_0). \tag{15}$$

補題 11. 任意の $a, b \in \mathcal{P}$ に対し $a' = \varphi(a), b' = \varphi(b)$ とおくと、

$$\left|\langle a,\ b\rangle\right| = \left|\langle a',\ b'\rangle\right|, \tag{16}$$

$$\mathrm{Re}\langle a,\ b\rangle = \mathrm{Re}\langle a',\ b'\rangle. \tag{17}$$

証明 前の補題から $T[a] = [a'], T[b] = [b'], \|a\| = \|a'\|, \|b\| = \|b'\|$ で T は射線の内積を保つから、(16) が出てくる。同じ理由で

$$\left|\langle a-e,\ b-e\rangle\right| = \left|\langle a'-e',\ b'-e'\rangle\right| \tag{18}$$

が導かれる。ところが (18) の両辺の二乗を展開すると

$$\left|\langle a,\ b\rangle\right|^2 - 2\mathrm{Re}\langle a,\ b\rangle + 1 = \left|\langle a',\ b'\rangle\right|^2 - 2\mathrm{Re}\langle a',\ b'\rangle + 1$$

であることが分かる。これと (16) とから (17) を得る。 ∎

補題 12. φ は等長写像である。

証明 任意の $a, b \in \mathcal{P}$ に対して

$$\|a-b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle a,\ b\rangle,$$
$$\|a'-b'\|^2 = \|a'\|^2 + \|b'\|^2 - 2\mathrm{Re}\langle a',\ b'\rangle.$$

ゆえに $\|a\| = \|a'\|, \|b\| = \|b'\|$ と (17) とから

$$\|a-b\|^2 = \|a'-b'\|^2.$$

∎

補題 13. φ は $\mathcal{P}$ の直線を $\mathcal{P}'$ の直線のなかに写す。

証明 l を $\mathcal{P}$ 上の直線とし、$l = \left\{ a + \lambda z \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{C} \right\}$ とする。ここで $a \in \mathcal{P}, z \in H_0, z \neq 0$ であるが、$\|z\| = 1$, $\langle a,\ z\rangle = 0$ と仮定しても一般性を失わない。
$a' = \varphi(a), z' = V(z)$ とおくと、$l' = \left\{ a' + \lambda' z' \,\middle|\, \lambda' \in \mathbb{C} \right\}$ は $\mathcal{P}'$ 上の直線である。
φ が l を l' のなかに写すことを示そう。
$b = a + \lambda z, b' = \varphi(b)$ とおく。
$\|z\| = 1, \langle a,\ z\rangle = 0$ の仮定から $\langle a,\ b\rangle = \|a\|^2$、$\|b\|^2 = \|a\|^2 + |\lambda|^2$、$\langle z,\ b\rangle = \lambda$。補題 11 により $\left|\langle a',\ b'\rangle\right| = \|a\|^2, \mathrm{Re}\langle a',\ b'\rangle = \|a\|^2$。すなわち $\langle a',\ b'\rangle = \|a\|^2$。
また $\langle a',\ z'\rangle = 0$、$\left|\langle z',\ b'\rangle\right| = |\lambda|$。
ゆえに $\lambda' = \langle z',\ b'\rangle$ とおくと $|\lambda'| = |\lambda|$ で、

$$\begin{aligned}
&\langle b' - (a' + \lambda' z'),\ b' - (a' + \lambda' z')\rangle \\
&= \|b\|^2 - 2\|a\|^2 - 2|\lambda|^2 + \|a\|^2 + |\lambda|^2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

すなわち $b' = a' + \lambda' z' \in l'$ であることがわかる。したがって $\varphi(l) \subset l'$ である。

∎

補題 14. $V : H_0 \to H_0'$ は等長・(反) 線形写像である。

証明 上の二つの補題と定理 9 から、$\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ は幾何的ヒルベルト空間の合同写像であると結論される。すなわち φ は等長・(反) 線形写像 $V_2 : H_0 \to H_0'$ を用いて $\varphi(e + x) = e' + V_2(x)$ と表すことができる。これと (15) とを較べると $V = V_2$ である。つまり V は等長・(反) 線形写像である。 ∎

等長・(反) 線形写像 V は H 全体へは次の処方にしたがって拡張する。まず V が等長・線形の場合、$U : H \to H'$ を $U(\lambda e + x) = \lambda e' + V(x)$ とする。このとき U は等長・線形写像。

V が等長・反線形の場合、$U : H \to H'$ を $U(\lambda e + x) = \overline{\lambda} e' + V(x)$ とする。このとき U は等長・反線形写像。

いずれの場合も $a = e + x$ $(x \in H_0)$ に対しては $U(a) = e' + V(x)$ で、すでに見たように $T[a] = [\varphi(a)] = [e' + V(x)] = [U(a)]$ が成り立つ。

$x \in *H_0$ に対しては $U(x) = V(x)$ でやはり $T[x] = [V(x)] = [U(x)]$ が成り立つ。

つまり U は T と両立する。

こうして射線の内積を保つ任意の写像 $T : \mathsf{P}(H) \to \mathsf{P}(H')$ に対して、T と両立する等長・(反) 線形写像 U の存在することが分かった。

■位相因子をべつにしての一意性 写像 $U : H \to H'$ は $U(a + b) = U(a) + U(b)$ を満たすとき**加法的**であるという。(反) 線形写像は加法的である。

定理 15. $T : \mathsf{P}(H) \to \mathsf{P}(H')$ は射線の内積を保つ写像、$U_1 : H \to H'$, $U_2 : H \to H'$ はどちらも T と両立する等長・加法的写像であるとする。このとき $\dim H \geq 2$ ならば U_1 と U_2 は位相因子の違いだけである。すなわち $U_2 = \lambda U_1, |\lambda| = 1$。

したがってとくに T と両立する等長・(反) 線形写像は位相因子をべつにして一意的に決まる。

証明 仮定から任意の $x \in *H$ に対し $T[x] = [U_i(x)]$ $(i = 1, 2)$。ゆえに、ある $\lambda_x \in *\mathbb{C}$ が存在し $U_2(x) = \lambda_x U_1(x)$ となるが、U_1, U_2 は等長だから $|\lambda_x| = 1$ である。

λ_x が $x \in *H$ に依存しないことを示そう。はじめに $x, y \in H$ が一次独立な場合を考える。このとき $U_i(x), U_i(y) \in H'$ もまた一次独立である。何故なら x, y の属する射線 $[x], [y]$ は相異なり、T は単射だから $T[x], T[y]$ も相異なる。ゆえにそれぞれを代表する $U_i(x), U_i(y)$ は一次独立である。

$x + y$ に U_2 を作用させると、U_1, U_2 の加法性から $U_2(x + y) = \lambda_x U_1(x) + \lambda_y U_1(y)$ および $U_2(x + y) = \lambda_{x+y} U_1(x) + \lambda_{x+y} U_1(y)$ が成り立つ。ここで右辺の係数を比較して $\lambda_x = \lambda_{x+y} = \lambda_y$ を得る。

次に $x, y \in H$ が一次従属の場合、x, y と一次独立な元 $z \in H$ をひとつとる ($\dim H \geq 2$ だからそれが可能である)。すると今示したことにより $\lambda_x = \lambda_z = \lambda_y$。

ゆえに λ_x は $x \in *H$ に依存しないから、これを λ と書くと、$U_2(x) = \lambda U_1(x), |\lambda| = 1$ で、定理は証明された。 ∎

注意. ここから明らかなように $\dim H \geq 2$ の場合、T と両立する等長・(反) 線形写像が線形か反線形かは T だけで決まってしまうのである。

$\dim H = 1$ の場合は既に注意したように、T と両立する等長・線形写像と等長・反線形写像の 2 種が共存する。

参考文献

[1] Bargmann, V., Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations, Journal of Mathematical Physics, vol.5, N.7, July 1964.

[2] 河田敬義 「岩波講座 基礎数学 アフィン幾何・射影幾何」岩波書店