多様体とベクトル場

木原浩貴

2008 年 8 月 1 日

概要

多変数の微分積分学を学んだことがあり、幾何学や物理学、工学の数理に興味を抱いている人を対象に可微分多様体 (略して多様体) とベクトル場について詳しい解説を試みる (※ 教科書では省略されることの多い部分をとくに選んで解説してある)。

ただし多様体の理論の基礎的な部分 (微分位相幾何的なトピック) には触れていない。

1 準備事項

1.1 本書を読む上での予備知識

多変数微分積分学を逆関数定理、常微分方程式の解の存在定理のところまで理解していることが必要である。

あとは位相空間論の基本的な知識を仮定している。

1.2 本書で使われる用語・記号等

1. U, V をそれぞれ $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ の開集合，$f : U \to V$ を写像、p を U 上の点とする。f は以下のとき点 p で C^r 級であると言われる：p の近傍 $U_1(\subset U)$ が存在して f の U_1 への制限が C^r 級である。
   f が p で C^r 級ならば p で連続である。また U の各点で C^r 級のとき、かつそのときに限り f は (全体として)C^r 級である。
2. $\sqcap^i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $\sqcap^i(x_1, \ldots, x_n) = x^i$ で定義される $(i = 1 \ldots n)$。
3. $Q^n(a)$ は 0 を中心とする半径が a の n 次元開立方体を表す：
$$Q^n(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \left|x^i\right| < a \ (i = 1 \ldots n) \right\}$$
4. $B^n(a)$ は 0 を中心とする半径が a の n 次元開球を表す：
$$B^n(a) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 < a^2 \right\}$$

2 可微分多様体

2.1 一般論

■可微分多様体の定義　ハウスドルフ空間 M の各点が $\mathbb{R}^n$ の開集合に同相な近傍をもつとき、M は n 次元位相多様体と呼ばれる。

$\mathbb{R}^n$ の開集合に同相な M の開集合 U は M の n **次元座標近傍**と呼ばれる。あるいは U と同相写像 φ を組にしたもの (U, φ) を M の n 次元座標近傍という。(U, φ) は n **次元局所座標系**とも呼ばれる。

本書では、同相写像 φ を特に U 上の n 次元**座標写像**と呼ぶことにする。

$\varphi(p) = (x^1, \ldots, x^n)$ ならば、$(x^1, \ldots, x^n)$ は p の座標である。各 x^i は p によって決まるからこれを p の関数と考えることもできる。そこで $x^i = \square^i \circ \varphi \ (i = 1, \ldots, n)$ と定義するとき、これを**座標関数**という。座標写像 φ は座標関数で決まるから $\varphi = (x^1, \ldots, x^n) = (x^i), (U, \varphi) = (U, x^1 \ldots x^n)$ 等とも書く。

n 次元座標近傍から成る集合 $S = \{(U_a, \varphi_a)\}$ は $\{U_a\}$ が M の被覆になっている場合、M の n 次元**座標近傍系**と呼ばれる。

以下で $r = 1, 2, \ldots, \infty, \omega$ とする (C^ω は「実解析的」を意味する)。

M の二つの n 次元座標近傍 $(U, \varphi), (U', \varphi')$ に対して、写像 $\varphi \circ \varphi'^{-1} : \varphi'(U \cap U') \to \varphi(U \cap U')$ を (U, φ) と (U', φ') の間の**座標変換**という。座標変換は $\mathbb{R}^n$ の開集合のあいだの同相写像である。よってこれらが C^r 級であるという言葉は初等解析学で既に定義されている。

M の座標近傍系 $S = \{(U_a, \varphi_a)\}$ はそれに属する任意の二つの座標近傍の座標変換が C^r 級写像となっている場合、C^r 級であるという。定義から、座標変換は C^r 級微分同相であることが分かる。

以下の議論では、位相多様体 M 上に少なくともひとつの C^r 級座標近傍系が存在することを仮定している。また座標近傍系の次元は n とし、これを一々断らない。

二つの C^r 級座標近傍系 S, S' は、和集合 $S \bigcup S'$ がまた C^r 級となるとき、C^r **級同値**であると定義し、これを

$$S \sim S' \ (C^r)$$

と書く。

練習問題 2.1. これが同値関係であることを確かめよ。

与えられた C^r 級座標近傍系 S に対して、S に C^r 級同値な C^r 級座標近傍系すべてをとって、これらの和集合 $C^r(S)$ を考えると、これはまた C^r 級座標近傍系である。

$$C^r(S) = \bigcup_{S' \sim S \ (C^r)} S'$$

$S \sim S' \ (C^r) \Longleftrightarrow C^r(S) = C^r(S')$ が成り立つ。そして $C^r(S)$ は M 上の C^r 級座標近傍系全体の集合のなかの極大元として特徴づけられる。すなわち、$C^r(S) \subset S'$ ならば $C^r(S) = S'$ (極大) であり、逆に S が極大ならば、$C^r(S) = S$ である。

練習問題 2.2. 以上のことを確かめよ。

$C^r(S)$ を S の定める M 上の n **次元** C^r **級可微分構造**と呼ぶ。そして組 $(M, C^r(S))$ を n **次元** C^r **可微分多様体**と呼ぶ。

$s < r$ ならば S は C^s 級でもあるのだから、C^r 可微分構造 $C^r(S)$ から自然に C^s 可微分構造 $C^s(S)$ を定義することができる。これは C^r 可微分構造を定める S の選び方によらない。この意味で、C^r 級可微分多様体は C^s 級可微分多様体でもある。

例えば多様体の実例の多くは実解析的 (C^ω 級) 多様体である。よって、それらは C^∞ 可微分多様体でもある。

本書では徒に複雑な議論を避けたい理由で、C^∞ 可微分多様体だけを扱うことにし、それをたんに**多様体**と呼ぶことにする。

また多様体 M の可微分構造を定義する座標近傍系 S を M の座標近傍系、S に属する座標近傍を M の座標近傍と呼ぶことにする。

■開部分多様体　以下では $M, M', M'', M_1, M_2, \ldots$ 等の記号は可微分多様体を表す。

M の開集合 U に自然に可微分構造を定義することができる。すなわち M の座標近傍系 $S = \{(U_a, \varphi_a)\}$ をとり、集合 $S_U = \{(U \cap U_a, \varphi_a|_{U \cap U_a})\}$ を考えると、これが U の座標近傍系になっていて、U に可微分構造が入る (S の選び方に依らないのは明らか)。

U にこの可微分構造を付けたものを M の**開部分多様体**と呼ぶ。

以下では M の開集合は、特に断りがなければ M の開部分多様体と考える。

■積多様体　M, M' をそれぞれ n, m 次元の多様体とすると積位相空間 $M \times M'$ は明らかに $n+m$ 次元の位相多様体である。M の座標近傍系 $\{\,(U_a,\, \varphi_a)\,\}$ と M' の座標近傍系 $\left\{\left(U'_b,\, \varphi'_b\right)\right\}$ に対して $\left\{\left(U_a \times U'_b,\, \varphi_a \times \varphi'_b\right)\right\}$ がその座標近傍系を与える。これが M, M' の座標近傍系の選び方とは無関係に一つの C^∞ 級可微分構造を定義することは明らかであろう。$M \times M'$ にこの可微分構造を入れたものを M, M' の**積多様体**と呼ぶ。

$(U, x^1 \ldots x^n), (U', y^1 \ldots y^n)$ をそれぞれ M, M' の座標近傍とすると

$$\tilde{x}^i(p, q) = x^i(p)$$
$$\tilde{y}^j(p, q) = y^j(q)$$

で定義される $n+m$ 個の関数 $\tilde{x}^i : U \times U' \to \mathbb{R}, \tilde{y}^j : U \times U' \to \mathbb{R}$ は明らかに $U \times U'$ 上の座標関数である。混同のおそれがなければ、$\tilde{x}^i, \tilde{y}^j$ はそれぞれ x^i, y^j と略記されることもある。

3 個以上の多様体の積多様体の定義も同様である。

■立方座標近傍　多様体 M の点 p の座標近傍 $(U, x^1 \ldots x^n)$ は以下の条件を満たすとき、p を中心とする半径が a の**立方座標近傍**と呼ばれる。

1. $x^i(p) = 0 \ (i = 1 \ldots n)$
2. 任意の $q \in U$ に対して $\left|x^i(q)\right| < a \ (i = 1 \ldots n)$ が成り立ち、反対に $\left|u^i\right| < a \ (i = 1 \ldots n)$ なる任意の値 $(u^1 \ldots u^n)$ に対して $x^i(q) = u^i \ (i = 1 \ldots n)$ を満たす点 q がある。

つまり、$\varphi = (x^1 \ldots x^n)$ とするとき、$\varphi(p) = 0$ でかつ $\varphi(U) = Q^n(a)$ となるのが立方座標近傍である。

点 p の座標近傍 (U, φ) が $\varphi(p) = 0$ を満たしていれば、U を適当な開集合 V に制限することで p を中心とする立方座標近傍が得られる。それは $\varphi(U)$ が $\mathbb{R}^n$ における 0 の近傍であることから明らかである。ゆえに任意の点 p に対して、必要なら $\mathbb{R}^n$ の平行移動と近傍の制限を施すことにより p を中心とする立方座標近傍がつねに存在することになる。さらにスケールの変換を施すことで、点 p は任意の半径 a の立方座標近傍をもつとも言える。

2.2　可微分多様体の例

例 2.1 (**n 次元アフィン空間**)**.** $\mathbb{R}^n$ は自明な n-次元位相多様体である。$\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ を恒等写像とすると、$\{\,(\mathbb{R}^n, \alpha)\,\}$ は C^ω- 座標系で $\mathbb{R}^n$ に C^ω 級可微分構造を定義する。$\{\,(\mathbb{R}^n, \alpha)\,\}$ により定義された C^ω 級可微分構造をもつ多様体は n-次元**アフィン空間**と呼ばれている。$\alpha = (x^1 \ldots x^n)$ と書くとき、$(x^1 \ldots x^n)$ はアフィン空間 $\mathbb{R}^n$ の**標準座標系**と呼ばれる。

例 **2.2** (n 次元球面). 集合

$$S^n = \left\{ u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} (u^i)^2 = 1 \right\}$$

を n 次元球面と呼ぶ。S^n には $\mathbb{R}^n$ の部分空間としての位相を与える。

$$\begin{aligned} U_a^+ &= \{ u \in S^n \mid u^a > 0 \}, \\ U_a^- &= \{ u \in S^n \mid u^a < 0 \} \quad (a = 1 \dots n+1) \end{aligned}$$

とおくと、$\{ U_a^+, U_a^- \}$ は S^n の開被覆である。

$\sigma = +, -$ とし写像 $\varphi_a^\sigma : U_a^\sigma \to \mathbb{R}^n$ を

$$\varphi_a^\sigma(u) = (u^1 \dots \widehat{u^a} \dots u^{n+1})$$

で定義すると ($\widehat{\square}$ は $\square$ の項目が実際には除かれてあることを意味する)、φ_a^σ は U_a^σ から n-次元開球 $B^n(1)$ への双射である。逆写像 $(\varphi_a^\sigma)^{-1} : B^n(1) \to U_a^\sigma$ は

$$(\varphi_a^\sigma)^{-1}(x^1 \dots x^n) = \left(x^1 \dots x^{a-1}, \sigma \sqrt{1 - \sum_{i=1}^n (x^i)^2}, x^a \dots x^n \right)$$

で与えられる。ここから分かるように $\varphi_a^\sigma : U_a^\sigma \to B^n(1)$ は同相写像である ($a = 1 \dots n+1$)。ゆえに S^n は n-次元位相多様体。座標関数 $\varphi_a^\sigma = (x_a^1 \dots x_a^n)$ のかたちを求めておくと

$$x_a^i(u) = \begin{cases} u^i & (i < a) \\ u^{i+1} & (i \geq a) \end{cases}$$

となる。

$a, b = 1 \dots n+1$, $a < b$, $\sigma, \tau = +, -$, とし $(U_a^\sigma, \varphi_a^\sigma)$ と $(U_b^\tau, \varphi_b^\tau)$ のあいだの座標変換則を求めてみよう。各 $u \in U_a^\sigma \cap U_b^\tau$ に対して

$$\begin{aligned} \varphi_a^\sigma(u) &= (u^1 \dots \widehat{u^a} \dots u^b \dots u^{n+1}) \\ \varphi_b^\tau(u) &= (u^1 \dots u^a \dots \widehat{u^b} \dots u^{n+1}) \end{aligned}$$

であるから

$$x_a^i = \begin{cases} x_b^i & (i < a,\ b \leq i) \\ x_b^{i+1} & (a \leq i < b-1) \\ \tau \sqrt{1 - \sum_{k=1}^n \left(x_b^k \right)^2} & (i = b-1), \end{cases}$$

$$x_b^i = \begin{cases} x_a^i & (i < a,\ b \leq i) \\ x_a^{i-1} & (a < i \leq b-1) \\ \sigma \sqrt{1 - \sum_{k=1}^n \left(x_a^k \right)^2} & (i = a) \end{cases}$$

を得る。座標変換は実解析関数だから $\{ (U_a, \varphi_a^+), (U_a, \varphi_a^-) \}$ は C^ω-級座標近傍系で、これが S^n に n-次元 C^ω-級可微分構造を定義する。

例 2.3 (n 次元射影空間). $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の二元 u, v のあいだの関係 $u \sim v$ を

$$u \sim v \Longleftrightarrow u = kv \quad (k \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

で定義すると、これは同値関係で商集合

$$\mathbb{R}P^n = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) / \sim$$

が定義される。u の同値類を $[u]$ と書き、商写像を π と書く：

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}P^n, \ \pi(u) = [u]$$

$\mathbb{R}P^n$ を n 次元実射影空間という。以下、$\mathbb{R}P^n$ を P^n と略記する。

P^n には商写像 $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to P^n$ に関する商位相を入れる。すなわち $U \subset P^n$ は $\pi^{-1}(U)$ が $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合のとき、かつそのときに限り開集合であると定義する。定義により π が連続であることは自明である。

V を $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合とすると

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{k \neq 0} kV$$

だから $\pi(V)$ は開集合。つまり π は開写像である (しかしこの事実は以下では使われない)。

P^n がハウスドルフ空間であることを証明しよう。$\mathbb{R}^{n+1}$ の内積を $(u,\ v)$ と書き、$|u| = \sqrt{(u,\ u)}$ と書く。P^n 上の異なる二点 $\pi(a) \neq \pi(b)$ に対し、$|a| = |b|$ と仮定してもいい。関数 $f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ を

$$f(u) = (a + b,\ u) \cdot (a - b,\ u)$$

で定義すると、集合

$$V_+ = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(u) > 0\},$$
$$V_- = \{u \in \mathbb{R}^{n+1} \mid f(u) < 0\}$$

はそれぞれ a, b を含む互いに素な $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合である。$f(ku) = k^2 f(u)$ だから $V_\pm = \pi^{-1}(\pi(V_\pm))$ が成り立ち (このような集合 $V_\pm$ を飽和集合という)、ゆえに $\pi(V_+), \pi(V_-)$ はそれぞれ $\pi(a), \pi(b)$ を含む互いに素な開集合である。したがって P^n はハウスドルフ空間である。

各 $a = 1, \ldots, n+1$ について

$$V_a = \{ \ [u] \in P^n \mid u^a \neq 0 \ \}$$

とおく。補助的に $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合 $\tilde{V}_a$ を

$$\tilde{V}_a = \left\{ \ u \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid u^a \neq 0 \ \right\}$$

で導入しておくと、明らかに $\tilde{V}_a$ は飽和集合で、$\pi(\tilde{V}_a) = V_a$ だから $\tilde{V}_a = \pi^{-1}(V_a)$ である。ゆえに V_a は P^n の開集合である。写像 $\psi_a : V_a \to \mathbb{R}^n$ を

$$\psi_a([u]) = \left(\frac{u^1}{u^a} \cdots \frac{\widehat{u^a}}{u^a} \cdots \frac{u^{n+1}}{u^a} \right)$$

で定義すると ψ_a は V_a から $\mathbb{R}^n$ への双射で、逆写像 ${\psi_a}^{-1} : \mathbb{R}^n \to V_a$ は

$${\psi_a}^{-1}(x^1 \ldots x^n) = \left[x^1 \ldots x^{a-1}, 1, x^a \ldots x^n \right]$$

で与えられる。

ψ_a が同相写像であることを証明するために、補助的に写像 $\tilde{\psi_a} : \tilde{V}_a \to \mathbb{R}^n, \theta_a : \mathbb{R}^n \to \tilde{V}_a$ を

$$\tilde{\psi_a}(u) = \left(\frac{u^1}{u^a} \dots \widehat{\frac{u^a}{u^a}} \dots \frac{u^{n+1}}{u^a}\right)$$
$$\theta_a(x^1 \dots x^n) = \left(x^1 \dots x^{a-1}, 1, x^a \dots x^n\right)$$

で定義すると、これらは明らかに連続で

$$\psi_a \circ \pi = \tilde{\psi_a}$$
$$\pi \circ \theta_a = {\psi_a}^{-1}$$

が成り立つ。ゆえに $\psi_a, {\psi_a}^{-1}$ 双方とも連続で、ψ_a は同相写像である。

よって P^n は n 次元位相多様体で、$\{ (V_a, \psi_a) \}$ がその座標近傍系を与える。座標関数 $\psi_a = (y_a^1 \dots y_a^n)$ は

$$y_a^i([u]) = \begin{cases} \dfrac{u^i}{u^a} & (i < a) \\[2ex] \dfrac{u^{i+1}}{u^a} & (i \geq a) \end{cases}$$

で与えられる。

$a, b = 1 \dots n+1, a < b$ とし、(V_a, ψ_a) と (V_b, ψ_b) のあいだの座標変換則を求めよう。$[u] \in V_a \cap V_b$ に対して

$$\psi_a([u]) = \left(\frac{u^1}{u^a} \dots \widehat{\frac{u^a}{u^a}} \dots \frac{u^b}{u^a} \dots \frac{u^{n+1}}{u^a}\right),$$
$$\psi_b([u]) = \left(\frac{u^1}{u^b} \dots \frac{u^a}{u^b} \dots \widehat{\frac{u^b}{u^b}} \dots \frac{u^{n+1}}{u^b}\right)$$

であるから、

$$y_a^i = \begin{cases} \dfrac{y_b^i}{y_b^a} & (i < a,\ b \leq i) \\[2ex] \dfrac{y_b^{i+1}}{y_b^a} & (a \leq i < b-1) \\[2ex] \dfrac{1}{y_b^a} & (i = b-1), \end{cases}$$

$$y_b^i = \begin{cases} \dfrac{y_a^i}{y_a^{b-1}} & (i < a,\ b \leq i) \\[2ex] \dfrac{y_a^{i-1}}{y_a^{b-1}} & (a < i < b) \\[2ex] \dfrac{1}{y_a^{b-1}} & (i = a) \end{cases}$$

を得る。座標変換は実解析的だから、$\{ (V_a, \psi_a) \}$ は C^ω-級座標近傍系で、これが P^n に n 次元 C^ω-級可微分構造を定義する。

3 可微分関数と可微分写像

3.1 可微分関数

実関数 $f : M \to \mathbb{R}$ が**点 p で C^r 級**であるとは、p の座標近傍 (U, φ) をとったとき、$f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ が $\varphi(p)$ で C^r であることを言う。これは p の座標近傍 (U, φ) の取り方に依存しない。

M の各点で C^r 級のとき、f **は C^r 級である**という。C^r 級関数は連続である。

命題 3.1. $f : M \to \mathbb{R}$ とし、U を M の開集合、$\{U_a\}$ を M の開被覆とする。このとき以下が成り立つ。

1. f が C^r 級ならば $f|_U$ は C^r 級である。
2. すべての a にわたって $f|_{U_a}$ が C^r 級ならば f は C^r 級である。

例 3.1. U を座標近傍とすると、U 上の座標関数は C^∞ 級の可微分関数である。

$f : M \to \mathbb{R}$ とし、(U, φ) を M の座標近傍とする。このとき、関数 $\mathbb{R}^n$ の開集合で定義された $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \mathbb{R}$ を f の (U, φ) による**表示**と呼ぶ。f が C^r 級ならば定義により $F = F(u^1, \ldots, u^n)$ は C^r 級である。このとき

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(p) = \frac{\partial F}{\partial u^i}(\varphi(p))$$

と書き、関数

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} : p \in U \mapsto \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

を定義する。明らかにこれは C^{r-1} 級の関数である。

U を座標近傍、$(x^1, \ldots, x^n), (x'^1, \ldots, x'^n)$ を U 上の座標関数とすると、U 上で

$$\frac{\partial f}{\partial x'^j} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} \quad (j = 1 \ldots n)$$

が成り立つ。この式の f に x'^i を代入すると

$$\delta^i_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x'^j} = \sum_k \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j}$$

が得られる。

m 個の C^r 級関数 $f_1, \ldots, f_m$ に対して行列

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p) \right)_{i=1\ldots m, j=1\ldots n}$$

を p における $f^1, \ldots, f^m$ の**ヤコビ行列**という。これはもちろん座標関数に依存するが、たとえば階数は座標関数によらない。

上記で $m = n$ のとき、ヤコビ行列の行列式を p における $f^1, \ldots, f^n$ の**ヤコビアン**という。記号では

$$\frac{D(f^1, \ldots, f^n)}{D(x^1, \ldots, x^n)}(p)$$

と書く。

これも座標関数に依存するが、ヤコビアンが 零でないという性質は座標によらない。

とくに座標関数のヤコビアンは零でない。ある意味でその逆が成り立って、

命題 3.2. $f^1, \dots, f^n$ を M 上の C^∞ 級関数とする。$p \in U$ において

$$\frac{D(f^1, \dots, f^n)}{D(x^1, \dots, x^n)}(p) \neq 0$$

ならば、p の十分に小さい近傍 $V(\subset U)$ に制限すると $\psi = (f^1, \dots, f^n)$ は V 上の座標写像となる。

証明 これは逆関数定理から明らか。 □

本書では C^∞ 関数を扱う機会が多いから、これらを単に **可微分関数** と呼ぶことにする。記号ではしかし M 上の可微分関数ぜんぶから成る集合を $C^\infty(M)$ で表す。$C^\infty(M)$ には自然に環の構造が入る。この環は結合的、可換で、乗法の単位元をもつ。M 上で恒等的に 1 をとる関数が乗法単位元である。

下の公式は基本的であるが、復習しておこう。

補題 3.3. $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を多項式関数とすると

$$\lim_{x \to +\infty} p(x)e^{-x} = 0$$

証明 $p(x) = x^n$ (n は非負整数) の場合を証明すればよい。微分すればわかるように x のあるところから $x^{n+1}e^{-x}$ は単調に減少し始める。ゆえに $a > 0$ が存在して、すべての $x > 0$ で $0 \leq x^{n+1}e^{-x} \leq a$ が成り立つ。両辺を x で割って $0 \leq x^n e^{-x} \leq a/x$ を得る。$x \to +\infty$ で $a/x \to 0$ だから $x^n e^{-x} \to 0$ となる。 □

補題 3.4.

$$a(t) = e^{-1/t} \quad (t > 0)$$

とおく。a は C^∞ 級で、すべての $k = 0, 1, 2, \dots$ に対して $\lim_{t \to +0} a^{(k)}(t) = 0$ となる。

証明

$$a^{(k)}(t) = p(1/t)e^{-1/t}$$

であることを示せばよい。ここで p は k に応じて決まる多項式関数である。
$k = 0$ の場合は自明だから、$0, \dots, k-1$ までは正しいとして k について証明する。仮定から

$$a^{(k-1)}(t) = p(1/t)e^{-1/t}.$$

微分すると

$$a^{(k)}(t) = -\left(p'(1/t) + p(1/t)\right)(1/t)^2\, e^{-1/t}.$$

これで k についても正しいことが証明された。 □

補題 3.5. $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は次の条件を満たしているとする。

1. a は $\{t \mid t \neq 0\}$ で C^∞ 級である
2. a は $t = 0$ で連続

3. a_k が存在して $\lim_{t\to 0, t\neq 0} a^{(k)}(t) = a_k$ が存在する $(k = 1, 2, \ldots)$

このとき a は $\mathbb{R}$ 全体で C^∞ 級である。つまり任意の $k = 0, 1, 2, \ldots$ について C^k 級である。

例えば $a(t) = 0$ $(t \leq 0)$, $a(t) = e^{-1/t}$ $(t > 0)$ と定義すれば a は与えられた条件を満たしており、C^∞ 級である。(注意：$t = 0$ の回りでテイラー展開すれば分かるように a は解析的でない)。

証明

k に関する帰納法で証明する。まず a は $\mathbb{R}$ 全体で連続だから、$k = 0$ では明らかに正しい。a が C^{k-1} 級までは分かっているとして a が C^k 級であることを証明する。

$t \neq 0$ とすると、平均値の定理から

$$\frac{a^{(k-1)}(t) - a^{(k-1)}(0)}{t - 0} = a^{(k)}(\theta t) \quad (0 < \theta < 1)$$

よって

$$\lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} \frac{a^{(k-1)}(t) - a^{(k-1)}(0)}{t - 0} = \lim_{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}} a^{(k)}(\theta t) = a_k.$$

すなわち、$a^{(k-1)}$ は $t = 0$ で可微分で、$a^{(k)}(0) = a_k$。そして $a^{(k)}$ は $t = 0$ でも連続である。

よって a は C^k 級である。 □

補題 3.6. 次の条件を満たす C^∞ 関数 $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が存在する：$b(t) = 1$ $(t \leq 1)$, $b(t) = 0$ $(t \geq 2)$, $0 < b(t) < 1$ $(1 < t < 2)$。

これを用いて次の条件を満たす C^∞ 関数 $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ の存在を示すことができる：

1. $c(t) = 1$ $(|t| < 1)$
2. $c(t) = 0$ $(|t| > 2)$
3. $0 < c(t) < 1$ $(1 < |t| < 2)$

証明 b は補題 3.5 の a を利用し

$$b(t) = \frac{a(2-t)}{a(2-t) + a(t-1)}$$

で定義すればよい。

c は $c(t) = b(t)b(-t)$ で定義すればよい。 □

補題 3.7. 次の条件を満たす C^∞ 関数 $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ が存在する：

1. $h(x) = 1$ $(x \in Q^n(1))$,
2. $h(x) = 0$ $(x \notin \overline{Q^n(2)})$,
3. $0 \leq h(x) \leq 1$.

証明 $h(x) = c(x_1) \cdots c(x_n)$ と定義すれば問題の条件をすべて満たす。 □

補題 3.8. $p \in M$ とし、U を p の近傍とする。このとき、次の条件を満たす p の近傍 V, W ならびに可微分関数 $h : M \to \mathbb{R}$ が存在する。

1. $W \subset V$, $\overline{V} \subset U$

2. $h(q) = 1$ $(q \in W)$,
3. $h(q) = 0$ $(q \in M \setminus \overline{V})$

を満たす。

証明 U は座標近傍で、U 上の座標写像 φ が $\varphi(p) = 0$, $\overline{Q^n(2)} \subset \varphi(U)$ を満たすと仮定しても一般性を失わない。補題 3.7 の関数 h を新たに h_0 と書き、p の近傍 V, W ならびに可微分関数 $h : U \to \mathbb{R}$ を $V = \varphi^{-1}(Q^n(2))$, $W = \varphi^{-1}(Q^n(1))$, $h = h_0 \circ \varphi$ で定義する。明らかに $W \subset V$ が成り立つ。また $V \subset \varphi^{-1}(\overline{Q^n(2)}) \subset \overline{V}$ で $\varphi^{-1}(\overline{Q^n(2)})$ はコンパクトだから M の閉集合である。すなわち $\overline{V} = \varphi^{-1}(\overline{Q^n(2)})$ で $\overline{V} \subset U$ も成り立つ。h を U の外では恒等的に 0 なるように定義域を拡張すれば V, W, φ は問題の条件をすべて満たす。 □

定理 3.9. $p \in M$ とし、U を p の近傍とする。このとき次の条件を満たす p の近傍 W が存在する：

1. $W \subset U$
2. U 上の任意の可微分関数 $f : U \to \mathbb{R}$ に対して M 全体で定義された可微分関数 $\tilde{f}$ が存在して $\tilde{f}|_W = f|_W$。

証明 補題の近傍 V, W と関数 h を使う。与えられた f に対して M 上の関数 $\tilde{f}$ を

$$\tilde{f}(q) = \begin{cases} f(q)h(q) & (q \in U) \\ 0 & (q \in M \setminus \overline{V}) \end{cases}$$

で定義すれば $\tilde{f}$ は可微分で問題の条件を満たす。 □

3.2 可微分写像

$f : M \to M'$ とし、$p \in M$ とする。写像 f は以下のとき **p で C^r 級である**という：

1. p の座標近傍 (U, φ) と $f(p)$ の座標近傍 (V, ψ) で $f(U) \subset V$ を満たすものが存在する
2. 上のような座標近傍に対して $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ が $\varphi(p)$ で C^r 級である。言い換えると $\psi = (y^1, \ldots, y^m)$ とすれば、すべての関数 $y^i \circ f \circ \varphi^{-1}$ が点 $\varphi(p)$ で C^r 級である $(i = 1 \ldots m)$。この条件は座標近傍の選び方に依らない。

f が点 p で C^r 級ならば明らかに p で連続である。
f が M の各点で C^r 級のとき、**f は C^r 級である**という。

補題 3.10. M を多様体、 $p \in M$ とする。p の座標近傍 $(U, x^1 \ldots x^n)$ で以下の条件を満たすものが存在する：M 全体で定義された C^∞ 関数 $h_1, \ldots, h_n$ が存在して、$h_i|_U = x^i$ $(i = 1, \ldots, n)$ が成り立つ。

証明 $(U', x'^1 \ldots x'^n)$ を p の座標近傍とする。各 i について $h_i \in C^\infty(M)$ と p の近傍 $U_i (\subset U')$ が存在して $h_i|_{U_i} = x'^i|_{U_i}$。そこで $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$、$x^i = x'^i|_U$ とすれば、p の座標近傍 $(U, x^1 \ldots x^n)$ は補題の条件を満たす。 □

定理 3.11. $f : M \to M'$ は以下のとき、かつそのときに限り、C^r 級である：

1. f は連続である
2. M' 上の任意の C^∞ 級関数 h に対して、M 上の関数 $h \circ f$ は C^r 級である。

証明 はじめに f は C^r 級であるとする。このとき M' 上の任意の C^∞ 級関数 h に対して $h\circ f$ が M の各点 p で C^r 級であることを示せばよい。
p の座標近傍 U と $f(p)$ の座標近傍 V が存在して $f(U)\subset V$。仮定から、$\psi\circ f\circ\varphi^{-1}$ は $\varphi(p)$ で C^r 級で、$h\circ\psi^{-1}$ は $\psi(f(p))$ で C^∞ 級である。よって

$$(h\circ f)\circ\varphi^{-1}=(h\circ\psi^{-1})\circ(\psi\circ f\circ\varphi^{-1}):\varphi(U)\to\mathbb{R}$$

は $\varphi(p)$ で C^r 級。したがって $h\circ f$ は p で C^r 級である。
次に逆を示そう。$f(p)$ の座標近傍 $(V,y^1\dots y^m)$ を補題 3.10 の条件を満たすように取る。そして p の座標近傍 (U,φ) を $f(U)\subset V$ を満たすようにとる (ここで f の連続性を用いてある)。
$h_1,\dots,h_n$ を $h_i|_V=y^i$ なる M' 上の C^∞ 関数とすると仮定から $h_i\circ f$ は C^r 級である。すなわち $h_i\circ f\circ\varphi^{-1}$ は p で C^r 級。ところが

$$h_i\circ f\circ\varphi^{-1}=y^i\circ f\circ\varphi^{-1}\quad(i=1,\dots,n)$$

だから、定義により f は p で C^r 級である。 □

練習問題 3.1. $f:M\to M',\ g:M'\to M'',\ h=g\circ f:M\to M''$ とする。f,g が C^r 級ならば、h は C^r 級である。これを確認せよ。

■積多様体と写像　積多様体 $M_1\times M_2$ に対して全射 (射影)

$$\pi_1:M_1\times M_2\to M_1\quad \pi_1(p,q)=p$$
$$\pi_2:M_1\times M_2\to M_2\quad \pi_2(p,q)=q$$

が定義される。また $p\in M_1, q\in M_2$ に対し単射

$$\iota_{1,q}:M_1\to M_1\times M_2,\quad \iota_{1,q}(p')=(p',q)$$
$$\iota_{2,p}:M_2\to M_1\times M_2,\quad \iota_{2,p}(q')=(p,q')$$

が定義される。
$\pi_1,\pi_2,\iota_{1,q},\iota_{2,p}$ のあいだには

$$\pi_1\circ\iota_{1,q}=\mathrm{id}_{M_1},$$
$$\pi_2\circ\iota_{2,p}=\mathrm{id}_{M_2}$$

の関係がある。
座標で表示してみれば明らかなようにこれらの写像は可微分である。

4　接ベクトルと写像の微分

■接ベクトル　$p\in M$ とする。線形写像 $v:C^\infty(M)\to\mathbb{R}$ が

$$v(fg)=(vf)g(p)+f(p)(vg)$$

を満たすとき、v を **p における M の接ベクトル**と呼ぶ。
v,w が p における M の接ベクトルならば、$v+w,\ \lambda v\ (\lambda\in\mathbb{R})$ もまた p における M の接ベクトルである。すなわち T_pM で p における M の接ベクトル全体の集合を表すことにすると、T_pM は実ベクトル空間である。T_pM を **p における M の接空間**と呼ぶ。

例 4.1. U を p の座標近傍とし、$x^1, \ldots, x^n$ を U 上の座標関数とする。

$i = 1, \ldots, n$, $f \in C^\infty(M)$ に対し $(\partial/\partial x^i)_p f$ を

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p f = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p)$$

と定義すると、$(\partial/\partial x^i)_p \in T_pM$ である。

命題 4.1. $a \in \mathbb{R}^n$ とし、アフィン空間 $\mathbb{R}^n$ の標準座標系を $(u^1, \ldots, u^n)$ と書く。このとき $(\partial/\partial u^1)_a, \ldots, (\partial/\partial u^n)_a$ は $T_a\mathbb{R}^n$ の基である。

証明 $\sum_{j=1}^n c^j \left(\partial/\partial u^j\right)_a = 0$ ならば、$c^i = \left\{\sum_{j=1}^n c^j \left(\partial/\partial u^j\right)_a\right\} u^i = 0$ $(i = 1 \ldots n)$ だから $(\partial/\partial u^1)_a, \ldots, (\partial/\partial u^n)_a$ は一次独立。

$\mathbb{R}^n$ 上の任意の可微分関数 f は

$$f(u) = f(a) + \sum_{i=1}^n g_i(u) \cdot (u^i - a^i) \quad (u \in \mathbb{R}^n) \tag{1}$$

の形に書ける。ここで各 g_i は可微分関数である。(1) の両辺を $u = a$ で u^i に関して偏微分して、$\partial f/\partial u^i(a) = \sum_{j=1}^n g_j(a)\delta^i_j = g_i(a) \quad (i = 1 \ldots n)$ を得る。$v \in T_a\mathbb{R}^n$ を (1) の両辺に適用すると

$$\begin{aligned} vf &= \sum_{i=1}^n (vg_i)(a^i - a^i) + \sum_{i=1}^n g_i(a) \cdot (vu^i) \\ &= \sum_{i=1}^n (vu^i)\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)(a) = \sum_{i=1}^n (vu^i)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_a f \end{aligned}$$

すなわち

$$v = \sum_{i=1}^n (vu^i)\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)_a$$

ゆえに $(\partial/\partial u^1)_a, \ldots, (\partial/\partial u^n)_a$ は $T_a\mathbb{R}^n$ を張る。 □

命題 4.2. M 上でつねに $c \in \mathbb{R}$ をとる関数をやはり c と書くと、$vc = 0$ が成り立つ。

証明 $c = 1$ の場合を示せばよい。

$1 \cdot 1 = 1$ だから $v1 = (v1)1 + 1(v1) = v1 + v1$。

ゆえに $v1 = 0$ □

命題 4.3. $v \in T_pM$ とする。

1. p のある近傍 U において $f|_U = 0$ ならば $vf = 0$ である。
2. p のある近傍 U において $f|_U = g|_U$ ならば $vf = vg$ である。

証明 第一の命題を示せば十分である。M 上の関数 h と p の近傍 V, W を補題 3.8 の条件を満たすようにとる。すると $f \cdot h = 0$ で、ゆえに

$$\begin{aligned} 0 &= v(f \cdot h) = (vf)h(p) + f(p)(vh) \\ &= (vf)1 + 0(vh) = vf. \end{aligned}$$

□

■関数の引き戻しと写像の微分　$f : M \to M'$ を可微分写像とする。$h \in C^\infty(M')$ に対し、$f^*h = h \circ f$ とおくと、$f^*h \in C^\infty(M)$ である。そして写像

$$f^* : C^\infty(M') \to C^\infty(M), \quad h \mapsto f^*h = h \circ f$$

は $\mathbb{R}$ 代数の準同型となっていることが容易に確かめられる。$f^*(h) = h \circ f$ を**写像 f による h の引き戻し**という。引き戻しは次の性質をもつ。

1. $\alpha : M \to M$ を恒等写像とすると、$\alpha^* : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は恒等写像
2. $f : M \to M', g : M' \to M'', h = g \circ f : M \to M''$ とすると $h^* = f^* \circ g^*$

次に $v \in T_pM$ に対し、$f_*v : C^\infty(M') \to \mathbb{R}$ を

$$(f_*v)h = v(f^*(h))$$

で定義すると $f_*v \in T_{f(p)M'}$ である。そして写像

$$(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)}M', \quad v \mapsto f_*v$$

は線形である。

$(f_*)_p$ を**写像 f の p における微分**と呼ぶ。

微分は次の性質をもつ

1. $\alpha : M \to M$ を恒等写像とすると $(\alpha_*)_p : T_pM \to T_pM$ は恒等写像。
2. $f : M \to M', g : M' \to M'', h = g \circ f : M \to M''$ とすると $(h_*)_p = (g_*)_{f(p)} \circ (f_*)_p$

ここから次の命題が導かれる：$f : M \to M'$ を微分同相とし、$g : M' \to M$ をその逆写像とする。$(f_*)_p : T_pM \to T_{f(p)M'}$ は線形同型で、その逆は $(g_*)_{f(p)} : T_{f(p)}M' \to T_pM$ に等しい。

系 4.4. 多様体 M と M' が微分同相ならば、M と M' の次元は等しい。

命題 4.5. $p \in M$ とし、U を p の近傍とする。$\iota : U \to M$ を自然な単射とすると、$(\iota_*)_p : T_pU \to T_pM$ は線形同型である。

証明 まず次の事実を確認する。p の近傍 $W(\subset U)$ があって、任意の $f \in C^\infty(U)$ に対し

$$f_1|_W = f|_W$$

を満たす $f_1 \in C^\infty(M)$ がつねに存在している (定理 3.9)。$(f_1|_U)|_W = f_1|_W$ だから f と $f_1|_U(= \iota^*f_1)$ とは p の近傍上で一致している。

さて $v \in T_pU, \iota_*v = 0$ とすると

$$vf = v(\iota^*f_1) = (\iota_*v)f_1 = 0$$

ゆえに $v = 0$。よって ι_* は単射である。

次に任意の $w \in T_pM$ に対し、$v \in T_pU$ を $vf = wf_1$ で定義する。これが f_1 の選び方に依らないこと、v が接ベクトルであることは容易に確認され、$v \in T_pU$ である。任意の $g \in C^\infty(M)$ に対して $(g|_U)|_W = g|_W$ だから

$$(\iota_*v)g = v(g|_U) = wg$$

すなわち $\iota_*v = w$ が成り立ち、ι_* が全射であることが分かった。 □

命題 4.6. U を p の座標近傍、$\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$ を U 上の座標写像 (座標関数) とする。
$\mathbb{R}^n$ の標準座標系を $u^1, \ldots, u^n$ と書くとき、

$$\varphi_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p = \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \right)_{\varphi(p)} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

が成り立つ。

証明 $\varphi_* \left(\partial/\partial x^i \right)_p = \sum_k \xi_i^k (\partial/\partial u^k)_{\varphi(p)}$ とおいて、これを関数 u^k に適用すると、

$$\begin{aligned} \xi_i^k &= (\varphi_*(\partial/\partial x^i)_p) u^k = (\partial/\partial x^i)_p (u^k \circ \varphi) \\ &= (\partial/\partial x^i)_p x^k = \delta_i^k. \end{aligned}$$

□

定理 4.7. n 次元多様体 M の接空間 T_pM の次元は n である。すなわち多様体 M の次元と一致する。
$x^1, \ldots, x^n$ を p の座標近傍上の座標関数とすると

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x^n} \right)_p$$

は T_pM の基である。

証明 ベクトル空間として

$$T_pM \cong T_pU \cong T_{\varphi(p)}\varphi(U) \cong T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n$$

最後の空間の次元が n だから T_pM の次元も n。
命題の後半も補題から明らかであろう。 □

■積多様体の接空間 M_1, M_2 を多様体とする。U, V をそれぞれ $p \in M_1, q \in M_2$ の座標近傍とし、$\varphi = (x^1 \ldots x^n), \psi = (y^1 \ldots y^m)$ をそれぞれ U, V 上の座標写像とする。

このとき $U \times V$ は積多様体 $M_1 \times M_2$ における座標近傍で、$\varphi \times \psi = (\tilde{x}^1 \ldots \tilde{x}^n, \tilde{y}^1 \ldots \tilde{y}^m)$ がその上の座標写像 (座標関数) であった。ここで $\tilde{x}^i = x^i \circ \pi_1, \tilde{y}^j = y^j \circ \pi_2$ である (π_1, π_2 はそれぞれ M_1, M_2 の上への射影)。
$\iota_{1,q}(p) = \iota_{2,p}(q) = (\ p\ ,\ q\ )$ により $\iota_{1,q}, \iota_{2,p}$ を定義すると

$$\begin{aligned} (\iota_{1,q})_* \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_p &= \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} \right)_{(p,q)} \qquad (i = 1, \ldots, n) \\ (\iota_{2,p})_* \left(\frac{\partial}{\partial y^i} \right)_q &= \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i} \right)_{(p,q)} \qquad (i = 1, \ldots, m) \end{aligned}$$

が成り立つ (確認せよ)。
ここから次のことが分かる。$\Psi_{p,q} : T_pM_1 \oplus T_qM_2 \to T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ を

$$\Psi_{p,q}(v, w) = (\iota_{1,q})_* v + (\iota_{2,p})_* w$$

と定義すると、$\Psi_{p,q}$ はベクトル空間の同型を与える。以下では $T_pM_1 \oplus T_qM_2$ と $T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$ はこの $\Psi_{p,q}$ の下で同一視して取り扱う。

練習問題 4.1. 次を確認せよ。

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_p = (\pi_1)_*\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right)_{(p,q)}$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_q = (\pi_2)_*\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}\right)_{(p,q)}$$

命題 4.8 (接ベクトルの成分の変換則). U を p の座標近傍、$(x^1 \dots x^n)$ を座標関数、$(x'^1 \dots x'^n)$ を別の座標関数とする。$v = \sum_{i=1}^n \xi^i (\partial/\partial x^i)_p = \sum_{i=1}^n \xi'^i (\partial/\partial x'^i)_p$ ならば

$$\xi^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial x'^j}(p)\xi'^j \quad (i = 1 \dots n) \tag{2}$$

の関係が成り立つ。

命題 4.9 (写像の微分の行列表示). $f : M \to M'$ を可微分写像、$p \in M$, $(U, x^1 \dots x^n)$ を p の座標近傍、$(V, y^1 \dots y^m)$ を $f(p)$ の座標近傍、$f^i = y^i \circ f$ $(i = 1, \dots, m)$ とすると、

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_p = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{f(p)} \qquad (j = 1 \dots n) \tag{3}$$

が成り立つ。

どちらも証明は容易であるので、読者の演習にまかせる。

■**接束**　与えられた多様体 M に対し

$$TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\}$$
$$\pi : TM \to M, (p, v) \mapsto p$$

とおく。集合 TM に位相と可微分構造を入れることを以下で考える。

そのために M の極大座標近傍系 $\{(U_a, \varphi_a)\}$, $\varphi_a = (x_a^1, \dots, x_a^n)$ をとり、写像 $\psi_a : \pi^{-1}(U_a) \to U_a \times \mathbb{R}^n$ を

$$\psi_a(p, v) = (p, \xi^1 \dots \xi^n)$$

で定義する。ここで ξ^i は v の成分である：$v = \sum \xi^i (\partial/\partial x_a^i)_p$。

ψ_a は双射で、

$$\pi_1 \circ \psi_a = \pi$$

が成り立ち、任意の部分集合 $V(\subset M)$ に対して

$$\psi_a(\pi^{-1}(V)) = V \times \mathbb{R}^n. \tag{4}$$

が成り立つ。

$(\pi^{-1}(U_a), \psi_a), (\pi^{-1}(U_b), \psi_b)$ の座標変換を求めよう。$\pi^{-1}(U_a) \cap \pi^{-1}(U_b) = \pi^{-1}(U_a \cap U_b)$ だから、(4) により

$$\psi_a(\pi^{-1}(U_a) \cap \pi^{-1}(U_b)) = (U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^n,$$
$$\psi_b(\pi^{-1}(U_a) \cap \pi^{-1}(U_b)) = (U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^n.$$

すなわち $\psi_a(\pi^{-1}(U_a) \cap \pi^{-1}(U_b))$ は $\psi_a(\pi^{-1}(U_a))$ の開集合である。

$(p,v) \in \pi^{-1}(U_a) \cap \pi^{-1}(U_b)$、$\psi_a(p,v) = (p,(\xi_a^1 \dots \xi_a^n))$, $\psi_b(p,v) = (p,(\xi_b^1 \dots \xi_b^n))$ とすると、

$$\xi_a^i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x_a^i}{\partial x_b^j}(p)\xi_b^j \quad (i = 1 \dots n).$$

ゆえに $\psi_a \circ \psi_b{}^{-1} : (U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^n \to (U_a \cap U_b) \times \mathbb{R}^n$ は微分同相である。

よって TM 上の位相が、各 $\pi^{-1}(U_a)$ が開集合で、ψ_a が同相写像になるという条件で一意的に決まる。この位相に関して TM はハウスドルフ空間で、$2n$ 次元位相多様体である。

TM の可微分構造も各 ψ_a が微分同相になるという条件で一意に決まる。

こうして定義された可微分多様体 TM を M の**接束**という。

練習問題 4.2. $\pi : TM \to M$ が可微分であることを示せ。

5 部分多様体

5.1 はめ込みと埋め込み、沈め込み

■写像の階数 M を n 次元の、M' を m 次元の多様体とし、$f : M \to M'$ を可微分写像とする。

f の 点 p における階数 $\mathrm{rank}_p f$ を

$$\mathrm{rank}_p f = \mathrm{rank}(f_*)_p = \dim f_*(T_p M)$$

で定義する。$p, f(p)$ の近傍で定義された座標関数 $(x^j), (y^i)$ を使い、f_* を行列表示すると、$\mathrm{rank}_p f$ とは

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial x^j}(p)\right)_{i=1\dots m, j=1\dots n}$$

の階数に他ならない。

定義から明らかに $\mathrm{rank}_p f \leq n, m$ である。

命題 5.1. $\mathrm{rank}_p f = n$ ならば、p を中心とする半径が a の立方座標近傍 $(U, x^1 \dots x^n)$ と $f(p)$ を中心とする半径が a の立方座標近傍 $(V, y^1 \dots y^m)$ で

1. $f(U) \subset V$
2. $y^i \circ f(q) = x^i(q)$ $(q \in U, i = 1, \dots, n)$
3. $y^i \circ f(q) = 0$ $(q \in U, i > n)$

を満たすものが存在する。

証明 $f(U) \subset V$ を満たす座標近傍 U, V は存在する。$u^1, \dots, u^n$ を U 上の任意の座標関数とし、$v^1, \dots, v^m$ を V 上の任意の座標関数とする。ただし $v^1, \dots, v^m$ は $v^i(f(p)) = 0$ を満たすようなものを選ぶ。

$f^i : U \to \mathbb{R}$, $f^i = v^i \circ f$ $(i = 1 \dots m)$ とおくと行列

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}(p)\right)_{i=1\dots n, j=1\dots m}$$

の階数は n である。よって必要なら $v^1 \dots v^m$ の順序をかえて

$$\det\left(\frac{\partial f^i}{\partial u^j}(p)\right)_{i,j=1\dots n} \neq 0$$

を満たすようにする。ここで $x^i = f^i$ $(i = 1, \dots, n)$ とおこう。U を十分小さくとれば $\varphi = (x^1 \dots x^n)$ は U 上の座標写像である (逆関数定理)。しかも $\varphi(p) = 0$ だから $\varphi(U) = Q^n(a)$ となるように U をとることができる。
$q \in U$ ならば $i = 1, \dots, n$ について $v^i(f(q)) = f^i(q) = x^i(q)$ だから

$$\left|v^i(f(q))\right| < a \quad (i = 1, \dots, n)$$

ゆえに V を

$$q' \in V \Longrightarrow \left|v^i(q')\right| < a \quad (i = 1, \dots, n)$$

を満たすように小さく制限しても関係 $f(U) \subset V$ は保たれる。
V 上の関数 $y^1, \dots, y^m$ を

$$\begin{aligned} &y^i = v^i \quad (i = 1, \dots, n) \\ &y^i = v^i - f^i \circ \varphi^{-1}(v^1 \dots v^n) \quad (i > n) \end{aligned}$$

と定義すると容易に分かるように

$$\det\left(\frac{\partial y^i}{\partial v^j}(f(p))\right)_{i,j=1\dots m} = 1$$

ゆえに V を十分小さくとれば $\psi = (y^1, \dots, y^m)$ は座標写像である。a を十分に小さく選んで $\psi(V) = Q^m(a)$ とすることもできる。
このように定義された座標近傍 $(U, \varphi), (V, \psi)$ が命題の条件をすべて満たすことは明らかである。 □

命題 5.2. $\mathrm{rank}_p f = m$ ならば、 p の座標近傍 $(U, x^1 \dots x^n)$ と $f(p)$ の座標近傍 $(V, y^1 \dots y^m)$ で

1. $f(U) = V$
2. $y^i \circ f(q) = x^i(q)$ $(q \in U, i = 1, \dots, m)$

を満たすものが存在する。

証明 証明は前の命題と同じ様にしてできるので省略する。 □

■はめ込み、埋め込み、沈め込み　さて可微分写像の重要なクラスであるはめ込みと埋め込み、沈め込みを定義しよう。

1. すべての点 $p \in M$ で $\mathrm{rank}_p f = n$ のとき f を**はめ込み**という。
2. f がはめ込みでかつ単射のとき**埋め込み**という。
3. すべての点 $p \in M$ で $\mathrm{rank}_p f = m$ のとき f を**沈め込み**という。
4. f が沈め込みでかつ全射のとき M' の**上への沈め込み**という。

注意. 書によっては「上への沈め込み」を「沈め込み」と呼んでいる。

命題 5.3. $f : M \to M'$ が沈め込みならば f は開写像である。
　特に f が M' の上への沈め込みならば f は商写像である。

証明 f を沈め込みとする。M と M' における座標近傍を命題 5.2 の条件を満たすようにとれば f は明らかに $f(U) = V$ すなわち開集合 U を開集合 V の上に写す。

M の任意の開集合はすべてこのような開集合 U の和として表されるから f は開写像である。
後半の命題は明らか。 □

命題 5.4. M, M', N を多様体とし、$f: M \to M'$ ははめ込み、$g: N \to M$ は連続写像、$h: N \to M'$ は可微分で $h = f \circ g$ なる関係があるとする。このとき実は g は可微分である。

証明 $p \in N$ とする。命題 5.1 に従い、$g(p) \in M$ を中心とする M の立方座標近傍 $(U, x^1 \dots x^n)$ ならびに $f(g(p)) = h(p)$ を中心とする M' の立方座標近傍 $(V, y^1 \dots y^m)$ を

$$y^i(f(u)) = \begin{cases} x^i(u) & (i \leq n) \\ 0 & (i > n) \end{cases} \quad (u \in U)$$

を満たすようにとる。
g は連続だから、p の座標近傍 W があって $g(W) \subset U$ を満たす。このとき $q \in W$ に対し

$$\begin{aligned} x^i(g(q)) &= y^i(f(g(q))) \\ &= y^i(h(q)) \quad (i = 1 \dots n) \end{aligned} \tag{5}$$

仮定から、$y^i \circ h$ は可微分関数だから式 (5) より W 上で g は可微分である。任意の点 p がこのような近傍 W をもつから g は可微分である。 □

命題 5.4 と "双対的" に次の命題も成立する。

命題 5.5. M, M', N を多様体とし、$f: M \to M'$ は M' の上への沈め込み、$g: M' \to N$ は写像、$h: M \to N$ は可微分写像で $h = g \circ f$ なる関係があるとする。このとき g は実は可微分である。

証明 命題 5.3 により f は商写像である。ゆえに g は連続である。
p の立方座標近傍 $(U, x^1 \dots x^n)$、$f(p)$ の立方座標近傍 $(V, y^1 \dots y^m)$ ならびに $h(p)$ の立方座標近傍 $(W, z^1 \dots z^l)$ を $f(U) = V, g(V) \subset W$

$$y^i(f(q)) = x^i(q) \quad (i = 1 \dots m, q \in U)$$

を満たすようにとる。
$v \in V$ に対し $q \in U$ を

$$x^i(q) = \begin{cases} y^i(v) & (i \leq m) \\ 0 & (i > m) \end{cases}$$

と定めると $v = f(q)$ である。すなわち $g(v) = g(f(q)) = h(q)$ が成り立つ。g, h を座標で表示してみると

$$z^i \circ g(y^1 \dots y^m) = z^i \circ h(y^1 \dots y^m, 0 \dots 0) \quad (i = 1 \dots l) \tag{6}$$

$z^i \circ h(x^1 \dots x^n)$ は可微分関数だから (6) の右辺は $(y^1 \dots y^m)$ の可微分関数。ゆえに g は可微分写像である。 □

5.2 部分多様体

■部分多様体の定義　M は以下のとき M' の**部分多様体**という。

1. 集合として $M \subset M'$

2. 自然な単射 $\iota : M \to M'$ は埋め込みである。すなわちすべての点 $p \in M$ で $\mathrm{rank}_p \iota = n$

M が M' の部分多様体ならば M の位相は M' の部分空間としての位相より細かいということが言えるが、ここでもし M の位相が M' の部分空間としての位相に等しいとき、M を M' の**正規部分多様体**という。M が M' の閉集合でかつ正規部分多様体のとき、M を M' の**閉部分多様体**という。

命題 5.6. M' を m 次元多様体、M を M' の n 次元部分多様体とする。このとき任意の $p \in M$ に対して、p を中心とする M' での立方座標近傍 $(V, y^1 \dots y^m)$ で 以下の条件を満たすものが存在する：$U = \{q \in V \mid y^i(q) = 0\ (i > n)\}$ は M の座標近傍で、$y^1 \dots y^n$ を U に制限した関数を $x^1 \dots x^n$ と書くと、$x^1 \dots x^n$ は U 上の座標関数になっている。

M は正規部分多様体だとすれば、V をさらに $V \cap M = U$ を満たすようにとることも可能である。

証明 $\iota : M \to M'$ は階数が n だから p の M での立方座標近傍 $(U, x^1 \dots x^n)$ と M' での立方座標近傍 $(V, y^1 \dots y^m)$ (どちらも中心は p、半径は $a > 0$) で以下の条件を満たすものが存在する (命題 5.1)。

1. $U \subset V$
2. $y^i(q) = x^i(q)\ (q \in U, i \le n)$
3. $y^i(q) = 0\ (q \in U, i > n)$

ここで $U' = \{q \in V \mid y^i(q) = 0\ (i > n)\}$ とおくと、$U = U'$ が成り立つことは容易に分かる。また $y^i\ (i \le n)$ の U への制限が x^i に等しいことも上の条件から明らかである。

M が正規部分多様体ならば、U は $U = W \cap M$ (W は M' の開集合) のかたちである。そこで V の半径 a を十分小さくとることにより、$V \subset W$ を満たすようにすることが可能。そのとき $V \cap M \subset W \cap M = U$ が成り立つ。$U \subset V \cap M$ と合わせて $U = V \cap M$ を得る。 □

練習問題 5.1. M' の開部分多様体は M' の正規部分多様体である。逆に M が M' の部分多様体で、M の次元が M' の次元に等しければ、M は M' の開部分多様体である。これを示せ。

定理 5.7. M を M' の部分多様体とする。$h : N \to M'$ は可微分写像で $h(N) \subset M$ とする。このとき写像 $g : N \to M, g(p) = h(p)\ (p \in N)$ が定義されるが、g が連続ならば、g は可微分である。

例えば M が M' の正規部分多様体ならば g は連続だから g は可微分である。

証明 これは命題 5.4 において $f = \iota$ (ι は M から M' への埋め込み) とした場合に相当するから、これ以上証を要さない。 □

系 5.8. M は M' の正規部分多様体であるとする。N は M' の部分多様体で、集合として $N \subset M$ であるとする。このとき、N は M の部分多様体である。

系 5.9. M' を多様体とし、M は集合として M' の部分集合で、同時に位相多様体でもあるとする。このとき、M が M' の部分多様体となるような M 上の可微分構造 はたかだか一つである。

証明 $S_i\ (i = 1, 2)$ を M 上の任意の C^∞ 級座標近傍系とする。M に S_i の定める可微分構造を入れた可微分多様体を M_i と書いて区別する。そして写像 $\alpha_i : M_i \to M'$ を自然な単射、$\beta : M_1 \to M_2$ を恒等写像とする。

さて M_i が M の部分多様体ならば、α_1 は可微分で $\alpha_1(M_1) = M_1 = M_2$。

β は連続だから補題により β は可微分。対称性から、β^{-1} も可微分ということが言えて、結局、恒等写像 β は微分同相。これは $M_1 = M_2$ を意味する。 □

■正規部分多様体

定理 5.10. M' を m 次元多様体、M を M' の部分集合とする。M の各点 p に対し、 p を中心とする M' における立方座標近傍 $(V, y^1 \dots y^m)$ で

$$V \cap M = \{q \in V \mid y^i(q) = 0 \quad (i > n)\} \tag{7}$$

を満たすものがあるとする。このとき、M は M' の部分空間として n 次元位相多様体で、開集合 (7) が p の M における座標近傍になり、$x^i = y^i|_{V \cap M}$ で定義される関数 $x^1 \dots x^n$ が座標関数を与える。
　これらの座標近傍系は M に可微分構造を定義し、M は M' の正規部分多様体になる。

証明 M を M' の部分空間と考えると、 (7) の集合 (これを以下、U とする) は M の開集合である。そして $\varphi = (x^1 \dots x^n)$ とおくと、$\varphi : U \to Q^n(a)$ は同相写像である。よって、 M は n 次元位相多様体である。
M 全体がこのような座標近傍 U で覆われる。そこで $\{(V_a, y_a^1 \dots y_a^m)\}_a$ を条件 (7) を満たす M' の座標近傍の集合で、V_a が M を被覆するようなものであるとし、各添字 a について $U_a = V_a \cap M$, $x_a^i = y_a^i|_{V_a \cap M}$ $(i = 1 \dots n)$ とおく。このとき $S = \{(U_a, x_a^1 \dots x_a^n)\}_a$ は M の座標近傍系である。
S が C^∞ 級であることを示そう。$(V_a, y_a^1 \dots y_a^m)$ と $(V_b, y_b^1 \dots y_b^m)$ のあいだの座標変換は

$$y_a^i(q) = f^i(y_b^1(q) \dots y_b^m(q)) \quad (q \in V_a \cap V_b,\ i = 1 \dots m)$$

である。ここで $f^1 \dots f^m$ は可微分関数である。
よって

$$x_a^i(q) = f^i(x_b^1(q) \dots x_b^n(q), 0 \dots 0) \quad (q \in U_a \cap U_b,\ i = 1 \dots n)$$

と書くことができ、$(U_a, x_a^1 \dots x_a^n)$ と $(U_b, x_b^1 \dots x_b^n)$ のあいだの座標変換もまた可微分であることが確認された。すなわち S は C^∞ 級の座標近傍系である。
こうして M には可微分構造が定義される。この可微分構造に関し、M が M' の部分多様体になることは定義から明らかであろう。 □

系 5.11. M, M' をそれぞれ n 次元、m 次元多様体とし、$f : M \to M'$ を沈め込みとする。このとき $f^{-1}(p)$ $(p \in f(M))$ は M の $(n-m)$ 次元閉部分多様体である。

証明 $q \in f^{-1}(p)$ とすると、f は沈め込みだから、q を中心とする半径が a の立方座標近傍 $(U, x^1 \dots x^n)$ と p を中心とする半径が a の立方座標近傍 $(V, y^1 \dots y^m)$ で $f(U) = V$, $y^i(f(q')) = x^i(q')$ $(i = 1 \dots m, q' \in U)$ なるものが存在する。このとき

$$f^{-1}(p) \cap U = \{q' \in U \mid x^1(q') = \dots = x^m(q') = 0\} \tag{8}$$

が成り立つから、$f^{-1}(p)$ は定理 5.10 の条件を満足し、M の $(n-m)$ 次元の閉部分多様体となる。(8) で定義される開集合が q のまわりの座標近傍を、$u^i = x^{m+i}|_W$ で定義される関数 $u^1 \dots u^{n-m}$ がそこでの座標関数を与える。 □

6　ベクトル場

6.1　可微分ベクトル場

多様体 M の各点 p にその点における接ベクトル $X_p \in T_pM$ を対応させる対応 X のことを M 上の**ベクトル場**という。言い換えると、M 上のベクトル場とは写像 $X : M \to TM$ で $\pi \circ X = \mathrm{id}_M$ を満たすものである。

ベクトル場 X は以下のとき p で C^r 級であると言われる：$(U, x^1 \dots x^n)$ を p の座標近傍とする。このとき

$$X_q = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(q) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_q \quad (q \in U)$$

と書けるが、関数 ξ^i $(i = 1 \dots n)$ がすべて p で C^r 級のとき、X は p で C^r 級であるという。これは p の座標近傍と座標関数の取り方に依らない。それは X_q の成分の変換が

$$\xi^i(q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial x'^k}(q) \xi'^k(q)$$

で与えられることから明らかである。

練習問題 6.1. X は p で C^r 級である $\Longleftrightarrow$ 写像 $X : M \to TM$ が p で C^r 級である。

ベクトル場 X と可微分関数 f に対し、Xf を

$$(Xf)(p) = X_p f$$

で定義される M 上の関数とする。

命題 6.1. X が C^r 級であるための必要十分条件は、任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して Xf が C^r 級となることである。

また $X = 0$ であるための必要十分条件は任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して $Xf = 0$ となることである。

証明 $p \in M$ とし、 $(U, x^1 \dots x^n)$ を p の座標近傍とする。X の成分関数を ξ^i とおくと

$$(Xf)(q) = X_q f = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(q) \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(q) \tag{9}$$

X が C^r 級ならば、定義により ξ^i はすべて p で C^r 級である。このとき (9) から Xf は p で C^r 級であることがわかる。

また $X = 0$ ならば $Xf = 0$ は明らか。

逆を示そう。任意の関数 $f \in C^\infty(M)$ に対して Xf がつねに C^r 級とする。p の近傍 $W(\subset U)$ と関数 $f^i \in C^\infty(M)$ が存在して $f^i|_W = x^i|_W$ が成り立つ $(i = 1, \dots, n)$。仮定から Xf^i はすべて C^r 級。ところが

$$\begin{aligned}
(Xf^i)(q) &= \sum_{k=1}^{n} \xi^k(q) \left(\frac{\partial f^i}{\partial x^k}\right)(q) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \xi^k(q) \left(\frac{\partial x^i}{\partial x^k}\right)(q) \\
&= \xi^i(q) \quad (q \in W,\ i = 1 \dots n)
\end{aligned}$$

だから各 ξ^i は p で C^r 級である。よって X は C^r 級である。

また任意の f に対して $Xf = 0$ ならば $\xi^i = Xf^i = 0$ で $X = 0$ となる。 □

以下では C^∞ 級ベクトル場だけを考える。**可微分ベクトル場**と言えば、C^∞ 級ベクトル場を意味することにする。

M 上の可微分ベクトル場 全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と書く。

$\mathfrak{X}(M)$ には自然に $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間の構造が入る。

実は以下で述べるように $\mathfrak{X}(M)$ は $\mathbb{R}$ 上のリー代数になる。

任意の関数 $f \in C^\infty(M)$ と $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対してベクトル場 fX を $(fX)_p = f(p)X_p$ で定義すると fX もまた可微分である。こうして $\mathfrak{X}(M)$ には $C^\infty(M)$ 上の加群の構造も入る。

6.2 ベクトル場のリー代数

ベクトル場のリー代数を述べる前に、使用される代数の用語と知識を整理して述べておこう。以下で K は任意の可換体としてよい。

■代数と準同型、部分代数　K 上のベクトル空間 A に乗法 $(x, y) \mapsto xy$ が定義されていて、それが x, y の双方について K-線形のとき、A を K **上の代数**または K-代数と呼ぶ。乗法がさらに

1. $(xy)z = x(yz)$ をつねに満たすとき、A を**結合的代数**
2. $xy = yx$ をつねに満たすとき、A を**可換代数**
3. $x^2 = 0, x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0$ をつねに満たすとき、A を**リー代数**

と呼ぶ。ただし A がリー代数のときは、x と y の積は $[\,x\,,\,y\,]$ と書かれるのが普通である (**括弧積**と呼ばれる)。

自明な代数として零ベクトル空間 $A = \{0\}$ がある。これを以下、**零代数**と呼ぶ。零代数が上に述べた代数のカテゴリーすべてに属していることは明白である。

K 自身が K 上の代数である。これは結合的で可換である。

A, A' を K 上の代数とすると、K-線形写像 $\varphi : A \to A'$ は $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ をつねに満たすとき K**-代数の準同型**という。準同型 φ は単射のとき**中への同型**、双射のとき**同型**と呼ばれる。

K-代数の K-線形部分空間 A_1 は、A の乗法で閉じているとき、A の乗法を導入することでまた K-代数になる。このとき A_1 を A の K**-部分代数**と呼ぶ。

■単位元をもつ代数　代数 A に乗法単位元 e がある場合は A に e を付けたもの (A, e) を考えて、これを**単位元をもつ代数**という。ただし単位元 e は一意に決まるから (A, e) は通常は A と書かれ、e を伏せておく。

A, A' をそれぞれ単位元 e, e' をもつ K 代数とする。K 代数の準同型 $\varphi : A \to A'$ がさらに $\varphi(e) = e'$ を満たすならば φ を**単位元をもつ** K**-代数の準同型**と呼ぶ。

代数 A に単位元 e があっても $e = 0$ であれば、A は零代数である。

リー代数は単位元 e をもてば $e = [\,e\,,\,e\,] = 0$ であるから零代数である。

単位元 e のある代数 A に対して、写像 $\alpha : K \to A, \alpha(c) = ce$ は単位元をもつ K-代数の準同型である。A が零代数でなければ、α は A の中への同型である (K が体だから)。

■結合代数とリー代数　A を K 上の結合代数とするとき、A の任意の二元 x, y の括弧積を

$$[\,x\,,\,y\,] = xy - yx$$

で定義すれば A は K 上のリー代数にもなる。このリー代数をもとの結合代数と区別して $(A)_{\mathrm{Lie}}$ と書くことにする。

■代数の微分とリー代数　F を任意の K-代数とする。以下で $f, g, \ldots$ は F の元を表す。

K-線形写像 $D : F \to F$ は

$$D(fg) = (Df)g + f(Dg)$$

をつねに満たすとき F の **K-微分 (derivation)** と呼ばれる。微分について

1. 0 ($0(f) = 0$) は K-微分
2. D_1, D_2 が K-微分ならば、任意の $c \in K$ に対して $D_1 + cD_2$ は K-微分
3. D_1, D_2 が K-微分ならば $[\, D_1\, ,\, D_2\,] = D_1D_2 - D_2D_1$ は K-微分

が成り立つ。

つまり F の K-微分全体の集合 $\mathrm{Der}(F)$ は K 上のリー代数になっている。

F の F 自身への K-線形写像全体のつくる K-結合代数を $\mathrm{Lin}_K(F)$ と書くとき、$\mathrm{Der}(F)$ は、K 上のリー代数 $(\mathrm{Lin}_K(F))_{\mathrm{Lie}}$ の K-部分代数である。

F が単位元 $1'$ をもつとき、任意の微分 D に対して $D(1') = 0$ である。実際、$1' = 1'1'$ だから $D(1') = D(1')1' + 1'D(1') = D(1') + D(1')$。ゆえに $D(1') = 0$。

■結合的可換代数の微分　F が 結合的・可換代数の場合にはさらに $f \in F$ と $D \in \mathrm{Der}(F)$ に対して $fD : F \to F$ を $(fD)h = f(Dh)$ と定義することで fD がまた微分になる。

$f(D_1 + D_2) = fD_1 + fD_2$, $(fg)D = f(gD)$, $(f_1 + f_2)D = f_1D + f_2D$ がつねに成り立つ。F が単位元 $1'$ をもつ場合にはさらに $1'D = D$ が成り立つ。

すなわち F が K 上の結合的・可換代数で単位元 $1'$ を有するとき、F を可換環とみることができ、このとき $\mathrm{Der}(F)$ には F-加群の構造が入る。F-加群としての $\mathrm{Der}(F)$ はもとの K-ベクトル空間としての $\mathrm{Der}(F)$ の構造と両立する。すなわち任意の $c \in K$ に対して $c' = c1'$ と書くならば $cD = c'D$ がつねに成り立つ。

F が 結合的・可換代数の場合には

$$[\, fD_1\, ,\, gD_2\,] = fg\, [\, D_1\, ,\, D_2\,] + f(D_1g)D_2 - g(D_2f)D_1$$

がつねに成り立つ。$\mathrm{Der}(F)$ の括弧積 $[\, D_1\, ,\, D_2\,]$ は双 F-線型でないことに注意しておこう。

■ベクトル場のリー代数　いよいよ本論に入る。$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対し、写像 $D_X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ を $D_X(f) = Xf$ で定義すると $D_X \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ が容易に確かめられる。そして対応 $\Omega : X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto D_X \in \mathrm{Der}(C^\infty(M))$ は $\mathbb{R}$-線形である。Ω が双射であることも容易に確かめられ、Ω は $\mathfrak{X}(M)$ の $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ への $\mathbb{R}$-線形同型になる。

そこで $\mathrm{Der}(C^\infty(M))$ のリー代数としての構造 (乗法) を Ω により $\mathfrak{X}(M)$ に移すならば $\mathfrak{X}(M)$ もまた $\mathbb{R}$ 上のリー代数になり、Ω はリー代数の同型となる。$D_{fX} = fD_X$ だから Ω は $C^\infty(M)$-加群の同型でもある。

要するに $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ の括弧積 $[\, X\, ,\, Y\,]$ は $D_{[\, X\, ,\, Y\,]} = [\, D_X\, ,\, D_Y\,]$ で定義されるのである。定義から明らかなように

$$[\, X\, ,\, Y\,]\, h = X(Yh) - Y(Xh) \quad (h \in C^\infty(M))$$

が常に成り立つ。

■ベクトル場と写像　M, M' を多様体、$f : M \to M'$ を可微分写像とする。M 上のベクトル場 X と M' 上のベクトル場 Y のあいだに

$$f_* X_p = Y_{f(p)} \quad (p \in M) \tag{10}$$

の関係があるとき、X と Y は **f-関係**にあるという。h を M' 上の可微分関数とすると

$$(f_* X_p)h = X_p(f^* h) = (X(f^*))(p)$$
$$Y_{f(p)}h = (Yh)(f(p)) = (f^*(Yh))(p)$$

が成り立つから、 (10) は言い換えると

$$X(f^* h) = f^*(Yh) \quad (h \in C^\infty(M')) \tag{11}$$

ということである。

命題 6.2. X と Y が f-関係にあれば、λX と λY は f-関係にある。ここで λ は任意の実数である。X_1, X_2 がそれぞれ Y_1, Y_2 と f-関係にあれば、$X_1 + X_2$ と $Y_1 + Y_2$、$[\, X_1 \,,\, X_2 \,]$ と $[\, Y_1 \,,\, Y_2 \,]$ は f-関係にある。

証明 (10) または (11) を使えば容易に証明できることなので詳細は読者に委ねる。 □

$f : M \to M'$ が微分同相の場合、$X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して (10) は M' 上のベクトル場 Y を定義しているから、X と f- 関係にある M' 上のベクトル場はこの Y だけである。そこで Y を $f_* X$ と書く。$f_* X$ の可微分性は

$$(f_* X)h = (X(f^* h)) \circ f^{-1}$$

から明らかである。

命題 6.3. $f : M \to M'$ を微分同相とする。任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$f_*(X + Y) = f_* X + f_* Y,$$
$$f_*(\lambda X) = \lambda(f_* X) \quad (\lambda \in \mathbb{R}),$$
$$f_* [\, X \,,\, Y \,] = [\, f_* X \,,\, f_* Y \,]$$

が成り立つ。

証明 命題 6.2 から明らか。 □

■積多様体上のベクトル場　M_2 上のベクトル場 Y に対し $M_1 \times M_2$ 上のベクトル場 $\tilde{Y}$ を

$$\tilde{Y}_{(\,p\,,\,q\,)} = \left(\iota_{2,p}\right)_* Y_q \quad ((\,p\,,\,q\,) \in M_1 \times M_2) \tag{12}$$

で定義する。Y を q の座標近傍 $(V, y^1 \ldots y^m)$ で座標表示してみると

$$Y_{q'} = \sum_{i=1}^{m} \eta^i(q') \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_{q'}.$$

よって (p, q) の座標近傍 $(U \times V, \tilde{x}^1 \ldots \tilde{x}^n, \tilde{y}^1 \ldots \tilde{y}^m)$ では

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_{(\,p'\,,\,q'\,)} &= \sum_{i=1}^{m} \eta^i(q') \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}\right)_{(\,p'\,,\,q'\,)} \\ &= \sum_{i=1}^{m} \eta^i \circ \pi_2(p', q') \left(\frac{\partial}{\partial \tilde{y}^i}\right)_{(\,p'\,,\,q'\,)}\end{aligned}$$

$\eta^i \circ \pi_2$ は可微分関数だから $\tilde{Y}$ は可微分ベクトル場である。定義から明らかに Y と $\tilde{Y}$ は 任意の $p \in M$ に対し $\iota_{2,p}$-関係にある。

命題 6.4. $M_1 \times M_2$ 上の任意の関数 F と点 $p \in M_1$ に対し、M_2 上の関数 f_p を

$$f_p(q) = F(p, q) \quad (q \in M_2)$$

で定義すると、

$$\left(Y f_p\right)(q) = \left(\tilde{Y} F\right)(p, q) \quad (p \in M_1, q \in M_2)$$

が成り立つ。

証明 $f_p = (\iota_{2,p})^* F$ だから

$$\begin{aligned} \left(Y f_p\right)(q) &= Y_q f_p = Y_q \left((\iota_{2,p})^* F\right) = \left(\left(\iota_{2,p}\right)_* Y_q\right) F \\ &= \tilde{Y}_{(p,q)} F = \left(\tilde{Y} F\right)(p, q) \end{aligned}$$

□

6.3 ベクトル場の積分曲線と 1 パラメータ局所変換群

■ベクトル場の積分曲線　$\mathbb{R}$ の連結部分集合を以下では**区間**とも呼ぶ。M のなかの **(連続) 曲線**とは区間 I から M のなかへの連続写像 $\gamma : I \to M$ のことと定義する。

I を開区間とする。曲線 $\gamma : I \to M$ は以下のとき、ベクトル場 X の**積分曲線**であるという：γ は可微分で

$$\gamma_* \left(\frac{d}{du}\right)_t = X_{\gamma(t)}$$

がつねに成立する。

これは以下に同値である：

$$\frac{d f(\gamma(t))}{dt} = X_{\gamma(t)} f \quad (f \in C^\infty(M))$$

$\gamma(I)$ が M の座標近傍 U に含まれる場合は $x^1, \ldots, x^n$ を U 上の座標関数として、次に同値である。

$$\frac{d\gamma^i(t)}{dt} = \xi^i(\gamma(t)) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{13}$$

ここで $\gamma^i(t) = x^i \circ \gamma(t)$ とおいた。 ξ^i は X の成分である ($X = \sum_i \xi^i(\partial/\partial x^i)$)。

(13) は $\gamma^i(t)$ が常微分方程式系

$$\dot{x}^i = \xi^i(x^1, \ldots, x^n) \quad (i = 1, \ldots, n)$$

の解であることを意味している。

したがってよく知られた常微分方程式の解の存在定理から以下の命題がただちに導かれる。

命題 6.5. $t_0 \in \mathbb{R}$ とする。$X \in \mathfrak{X}(M)$ と $p \in M$ に対して初期条件

$$\gamma(t_0) = p \tag{14}$$

を満たす X の積分曲線 $\gamma : I \to M$ が存在する。同じ初期条件を満たす X の二つの積分曲線は定義域の共通部分で等しい。

X の積分曲線ぜんぶの集合のなかの極大元を X の**極大積分曲線**という。

定理 6.6. 初期条件 (14) を満たす X の極大積分曲線 γ が唯一つ存在する。そして (14) を満たす X の積分曲線はすべて γ に含まれる。

証明 $\{\gamma_a\}$ を初期条件 (14) を満たす X の積分曲線ぜんぶから成る集合とし、γ_a は開区間 I_a で定義されているとする。このとき

$$I = \bigcup_a I_a$$

は t_0 を含む開区間である。写像

$$\gamma : I \to M, \quad \gamma(t) = \gamma_a(t) \quad (t \in I_a)$$

は well-defined で、やはり初期条件 (14) を満たす X の積分曲線である。γ' を X の積分曲線で、$\gamma \subset \gamma'$ だとすると γ' は初期条件 (14) を満たすから γ の定義により、$\gamma' \subset \gamma$、$\gamma = \gamma'$ でなければならない。よって γ は X の極大積分曲線である。こうして (14) を満たす X の極大積分曲線の存在が証明された。その一意性は γ の定義から明らかである。定理の後半の主張も γ の定義から明らかである。 □

X の積分曲線 $\gamma : I \to M$ と $t_0 \in \mathbb{R}$ に対し、$\gamma_{t_0} : I - t_0 \to M$ を

$$\gamma_{t_0}(t) = \gamma(t + t_0)$$

で定義する。すると γ_{t_0} もまた X の積分曲線である。$(t_0, \gamma) \mapsto \gamma_{t_0}$ は、X の積分曲線全体の集合の上に加法群 $\mathbb{R}$ が作用していると見ることができる。この作用において曲線のあいだの包含関係は不変であるから、極大な積分曲線は極大な積分曲線に写されることが分かる。

さて

命題 6.7. $\gamma : I \to M$ を 初期条件 $\gamma(0) = p$ を満たす X の極大積分曲線とする。$t \in I, q = \gamma(t)$ とし、$\gamma' : I' \to M$ を初期条件 $\gamma'(0) = q$ を満たす X の極大積分曲線とする。すると

1. $s \in I' \iff s + t \in I$ で、このとき $\gamma'(s) = \gamma(s + t)$ が成立。
2. $-t \in I'$ で $\gamma'(-t) = p$ が成立。

証明 $\gamma_t : I - t \to M$ は初期条件 $\gamma_t(0) = \gamma(t) = q$ を満たす X の極大積分曲線だから一意性により $I' = I - t$, $\gamma' = \gamma_t$ が成立。ここから第一の命題は明白。
第二の命題に関しては、$0 \in I$ だから $-t \in I'$ で、

$$\gamma'(-t) = \gamma_t(-t) = \gamma(t - t) = \gamma(0) = p.$$

□

■ 1 パラメータ局所変換群　常微分方程式の定理と同様に以下の定理が成立する。

定理 6.8. ベクトル場 X が与えられたとき、各 $p \in M$ に対して $\gamma_p : I_p \to M$ を初期条件 $\gamma_p(0) = p$ を満たす X の極大積分曲線とする。$\mathbb{R} \times M$ の部分集合 Φ と写像 $\varphi : \Phi \to M$ を

$$\Phi = \{(t, p) \mid t \in I_p\},$$
$$\varphi(t, p) = \gamma_p(t)$$

で定義する。このとき

1. $\varphi(0, p) = p$,
2. $(t, p) \in \Phi, (s, \varphi(t, p)) \in \Phi$ ならば $(s + t, p) \in \Phi$,
3. $(t, p) \in \Phi$ ならば $(-t, \varphi(t, p)) \in \Phi$,
4. $(t, p) \in \Phi, (s + t, p) \in \Phi$ ならば $(s, \varphi(t, p)) \in \Phi$,
5. $(t, p) \in \Phi, (s, \varphi(t, p)) \in \Phi, (s + t, p) \in \Phi$ ならば $\varphi(s, \varphi(t, p)) = \varphi(s + t, p)$,
6. Φ は開集合で、$\varphi : \Phi \to M$ は C^∞ 級、
7. $\Phi_p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \Phi\}$ は 0 を含む $\mathbb{R}$ の連結開集合 (我々の用語では開区間) である。

証明 「Φ は開集合で、$\varphi : \Phi \to M$ は C^∞ 級」の部分だけを証明しよう。他はやさしいので 読者に委ねる。
$\Phi'(\subset \Phi)$ は以下の条件を満たす Φ の点 (t_0, p_0) の集合とする：$\delta > 0$ と p_0 の近傍 V が存在して

1. $\Omega = \{\, t \mid |t - t_0| < \delta \,\} \times V \subset \Phi$, (すなわち (t_0, p_0) は Φ の内点)
2. Ω 上で φ は C^∞ 級。

$\Phi' = \Phi$ を示そう。$(t_0, p_0) \in \Phi$ とし、$t_0 \geq 0$ と仮定 ($t_0 < 0$ の場合は略)。
(t_0, p_0) が座標近傍に含まれるときは、常微分方程式のよく知られた定理により $(t_0, p_0) \in \Phi'$ である。
一般の場合、区間 $[0, t_0]$ の分割 $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_n = t_0$ があって、各 $i = 1, \ldots, n$ に対し $\gamma_{p_0}([\tau_{i-1}, \tau_i])$ が座標近傍に含まれるから、結局次の命題を示せばいい：$(t_1, p_0) \in \Phi', (t_2, \varphi(t_1, p_0)) \in \Phi'$ ならば $(t_1 + t_2, p_0) \in \Phi'$ である。以下はその証明である。
$p_1 = \varphi(t_1, p_0), p_2 = \varphi(t_2, p_1)$ とおくと、仮定から $\delta > 0$ と p_1 の近傍 W が存在して

$$\Omega_2 = \{\, s \mid |s - t_2| < \delta \,\} \times W \subset \Phi$$

であり、φ は Ω_2 上で C^∞。さらに $\delta_1 > 0$ と p_0 の近傍 V が存在して

$$\Omega_1 = \{\, u \mid |u - t_1| < \delta_1 \,\} \times V \subset \Phi$$

であり、φ は Ω_1 で C^∞。
φ の Ω_i への制限を φ_i と書こう ($i = 1, 2$)。$\varphi_1(t_1, p_0) = p_1$ で φ_1 は連続であるから $\varphi_1(\Omega_1) \subset W$ と仮定してもよい。

$$\Omega = \{\, t \mid |t - (t_1 + t_2)| < \delta \,\} \times V$$

とおく。$(t, q) \in \Omega$ ならば

$$(t_1, q) \in \Omega_1(\subset \Phi),$$
$$\varphi(t_1, q) = \varphi_1(t_1, q) \in W,$$
$$(t - t_1, \varphi(t_1, q)) \in \Omega_2(\subset \Phi)$$

が成り立つ。ゆえに

$$(t, q) = ((t - t_1) + t_1, q) \in \Phi$$

である。すなわち $\Omega \subset \Phi$ 。そして

$$\begin{aligned} \varphi(t, q) &= \varphi(t - t_1, \varphi(t_1, q)) \\ &= \varphi_2(t - t_1, \varphi_1(t_1, q)) \end{aligned}$$
$$((t, q) \in \Omega)$$

が成り立つ。φ_1, φ_2 が C^∞ 級だからここから φ は Ω 上で C^∞ 級と分かる。 □

上の定理で定義された写像 $\varphi : \Phi \to M$ を本書では**ベクトル場 X が自由生成する M の 1 パラメータ局所変換群** と呼ぶ。

一般に M の**1 パラメータ局所変換群**とは写像 $\varphi : \Phi \to M$ で次の条件を満たすものをいう：

1. Φ は $\mathbb{R} \times M$ の開集合である。
2. φ は C^∞ 級である。
3. 任意の $p \in M$ に対して $\Phi_p = \{t \in \mathbb{R} \mid (t, p) \in \Phi\}$ は 0 を含む $\mathbb{R}$ の連結開集合 (開区間) である。
4. $\varphi(0, p) = p$,
5. $(t, p) \in \Phi$, $(s, \varphi(t, p)) \in \Phi$, $(s + t, p) \in \Phi$ ならば $\varphi(s, \varphi(t, p)) = \varphi(s + t, p)$.

定義域を明示したいため 1 パラメータ局所変換群を以下、(Φ, φ), (Φ', φ') 等と書く。$\Phi \subset \Phi'$ かつ Φ 上で $\varphi = \varphi'$ のとき、$(\Phi, \varphi) \subset (\Phi', \varphi')$ と書く。

M の 1 パラメータ局所変換群 (Φ, φ) が与えられたとき、ベクトル場 X を

$$X_p f = \left[\frac{df(\varphi(t, p))}{dt}\right]_{t=0}$$

で定義することができる。ここで $p \in M$, $f \in C^\infty(M)$.

X は C^∞ 級である。実際、$\delta > 0$ と p の近傍 U が存在して

$$\Omega = \{t \mid |t| < \delta\} \times U \subset \Phi.$$

与えられた関数 f に対し、$g : \Omega \to \mathbb{R}$, $g(t, q) = f(\varphi(t, q))$ は C^∞ 級関数である。そして

$$(Xf)(q) = X_q f = \left[\frac{df(\varphi(t, q))}{dt}\right]_{t=0} = \frac{\partial g}{\partial t}(0, q)$$

だから Xf は C^∞ 級。

上で定義されたベクトル場 X は 1 パラメータ局所変換群 (Φ, φ) の**無限小変換**と呼ばれている。

命題 6.9. X を 1 パラメータ局所変換群 (Φ, φ) の無限小変換とする。このとき、任意の $p \in M$ に対して曲線 $\gamma_p : \Phi_p \to M$, $\gamma_p(t) = \varphi(t, p)$ は X の積分曲線である。すなわち任意の $f \in C^\infty(M)$ に対し

$$\frac{df(\gamma_p(t))}{dt} = X_{\gamma_p(t)} f$$

がすべての $t \in \Phi_p$ で成立する。

証明 $q = \gamma_p(t)$ とおく。仮定から、十分小さい $\delta > 0$ に対し、$\{s \mid |s| < \delta\} \subset \Phi_q$, $\{t + s \mid |s| < \delta\} \subset \Phi_p$ が成り立つ。$|s| < \delta$ とすると

$$\varphi(s, q) = \varphi(s, \varphi(t, p)) = \varphi(t + s, p).$$

よって

$$\begin{aligned} X_q f &= \left[\frac{df(\varphi(s, q))}{ds}\right]_{s=0} = \left[\frac{df(\varphi(t + s, p))}{ds}\right]_{s=0} \\ &= \frac{df(\varphi(t, p))}{dt} = \frac{df(\gamma_p(t))}{dt} \end{aligned}$$

□

命題 6.10. $(\Phi,\varphi),(\Phi',\varphi')$ を M の 1 パラメータ局所変換群とし、X,X' をそれぞれの無限小変換とする。このとき

$$\Phi\cap\Phi' \text{上で} \varphi=\varphi' \Longleftrightarrow X=X'.$$

証明 $\Longrightarrow$ は定義から自明である。
$\Longleftarrow$ は積分曲線の一意性 (定義域の共通部分で等しいという性質) による。 □

定理 6.11. ベクトル場 X の自由生成する M の 1 パラメータ局所変換群 (Φ,φ) は X を無限小変換にもつ M の 1 パラメータ局所変換群全体の集合のなかでの最大元である。それは 1 パラメータ局所変換群全体の集合のなかでの極大 (延長不能の) 元であり、X を無限小変換にもつなかでは唯一の極大元である。

証明 (Φ,φ) を X の自由生成する 1 パラメータ局所変換群とする。(Φ,φ) の無限小変換は X に他ならない。実際、$p\in M$ に対して $\gamma_p:\Phi_p\to M,\gamma_p(t)=\varphi(t,p)$ はそもそもの定義から X の積分曲線なのだから

$$X_pf=\left[\frac{df(\varphi(t,p))}{dt}\right]_{t=0}.$$

(Φ',φ') を X を無限小変換にもつ任意の 1 パラメータ局所変換群とすると、$\gamma'_p:\Phi'_p\to M,\gamma'_p(t)=\varphi'(t,p)$ は初期条件 $\gamma'_p(0)=p$ を満たす X の積分曲線である。γ_p の最大性から $\Phi'_p\subset\Phi_p,\gamma'_p\subset\gamma_p$. p は任意の点だから $(\Phi',\varphi')\subset(\Phi,\varphi)$ で (Φ,φ) は最大元である。定理の残りの主張は明らかであろう。 □

こうして M 上のベクトル場 X の全体と M の極大 1 パラメータ局所変換群 (Φ,φ) の全体とが一対一に対応していることが分かった。すなわち、ベクトル場 X には X の自由生成する 1 パラメータ局所変換群 (Φ,φ) を対応させ、極大 1 パラメータ局所変換群 (Φ,φ) には、それの無限小変換 X を対応させるとき、この二つの対応は互いに逆の関係になっている。

X の自由生成する 1 パラメータ局所変換群 (Φ,φ) が $\mathbb{R}\times M$ 全体で定義されているとき、X は**完備**であるといい、同時にこのとき (Φ,φ) は **1 パラメータ変換群** と呼ばれる。

練習問題 6.2. M がコンパクトならばすべてのベクトル場 X は完備である。これを示せ。

■定義域についての注意 (Φ,φ) を 1 パラメータ局所変換群、U を M の開集合とする。

$$\{t\}\times U\subset\Phi$$

のとき、**U 上で φ_t が定義される**ということにする。実際、このとき写像 $\varphi_t:U\to M$ が $\varphi_t(p)=\varphi(t,p)$ により定義される。

φ_t の定義される開集合 U、すなわち上の条件を満たす開集合 U は一定しない。そのうち最大のものは集合 $\{p\in M\mid(t,p)\in\Phi\}$ であるが、我々は φ_t の定義域 U を問題に応じて適宜制限して使っていく。

U 上で φ_t が定義されるとき、$\varphi_t(U)$ は M の開集合で、φ_t は U から $\varphi_t(U)$ の上への微分同相である。

また U 上で $\varphi_t\circ\psi_s$ が定義されるというとき、それは U 上で ψ_s が定義され、$\psi_s(U)$ 上で φ_t が定義されるという意味である。

1 パラメータ局所変換群が 3 個以上ある場合も同様である。

定理 6.12. $X,Y\in\mathfrak{X}$ とし, $(\Phi,\varphi),(\Psi,\psi)$ はそれぞれ X,Y の自由生成する 1 パラメータ局所変換群とする。以下は同値。

1. I, I' を 0 を含む開区間、U を M の開集合とする。すべての $t \in I, s \in I'$ に対して U 上で $\varphi_t \circ \psi_s$ が定義されるならば、やはりすべての $t \in I, s \in I'$ に対して U 上で $\psi_s \circ \varphi_t$ も定義され、U 上で

$$\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t \quad (t \in I, s \in I'). \tag{15}$$

が成り立つ。

2. I を 0 を含む開区間とする。すべての $t \in I$ に対して U 上で φ_t が定義されるならば

$$(\varphi_t)_* Y = Y \quad (t \in I)$$

が U 上で成り立つ。すなわち

$$(\varphi_t)_* Y_p = Y_{\varphi_t(p)} \quad (t \in I, p \in U) \tag{16}$$

が成り立つ。

証明 まず 1. $\Longrightarrow$ 2. を示す。$p \in U$ とし、p の近傍 V と 0 を含む開区間 I' を

$$\psi(s, q) \in U \quad (s \in I', q \in V)$$

を満たすようにとる。仮定からすべての $t \in I$ と $s \in I'$ に対して V 上で $\varphi_t \circ \psi_s$ が定義される。よって 1. によりすべての $t \in I$ と $s \in I'$ に対して V 上で $\psi_s \circ \varphi_t$ も定義され、 (15) が成立する。とくに

$$\varphi_t(\psi_s(p)) = \psi_s(\varphi_t(p)) \quad (t \in I, s \in I')$$

が成り立つ。この両辺を s に関して微分して (16) を得る。
次に 2. $\Longrightarrow$ 1. を示す。$V = \bigcup_{s \in I'} \psi_s(U)$ とおくと、V は開集合で、仮定からすべての $t \in I$ に対して V 上で φ_t が定義されている。任意の $t \in I$ と $p \in U$ に対し、V 上の曲線

$$\gamma(s) = \varphi_t(\psi_s(p)) \quad (s \in I')$$

を考えると、$\psi_s(p)$ $(s \in I')$ は Y の積分曲線だから

$$\gamma_* \left(\frac{d}{du} \right)_s = (\varphi_t)_* Y_{\psi_s(p)}.$$

ところが 2. により

$$(\varphi_t)_* Y_{\psi_s(p)} = Y_{\varphi_t(\psi_s(p))} = Y_{\gamma(s)}.$$

ゆえに

$$\gamma_* \left(\frac{d}{du} \right)_s = Y_{\gamma(s)}$$

すなわち $\gamma : I' \to M$ は初期条件 $\gamma(0) = \varphi_t(p)$ を満たす Y の積分曲線。ゆえに同じ初期条件を満たす Y の極大積分曲線 $\psi_s \circ \varphi_t(p)$ は任意の $s \in I'$ に対して定義されてしかもそこで $\gamma(s)$ と一致していなければならない。よって (15) を得る。 □

6.4 ベクトル場の括弧積の幾何的意味

定理 6.13. $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とすると、

$$[\,X\,,\,Y\,] = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[Y - (\varphi_t)_* Y]\,. \tag{17}$$

が成り立つ。

ここで式の右辺の意味を説明しておこう。任意の点 $p \in M$ に対して p の近傍 U と正数 δ があって、$|t| < \delta$ を満たすすべての t に対し U 上で φ_t が定義される。このとき、$\varphi_{-t}(U)$ 上でも φ_t が定義されることに注意しよう。(17) 右辺の第二項 $(\varphi_t)_* Y$ は $\varphi_{-t}(U)$ 上のベクトル場 Y を φ_t により U の上に移してきたものである。また極限は各点ごとの収束を意味する。よって (17) は U 上の各点 p で

$$[\,X\,,\,Y\,]_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[Y_p - (\varphi_t)_* Y_{\varphi_{-t}(p)}\right]$$

を意味する。収束はもちろん $T_p(M)$ の通常の位相 (線形位相) に関するものである。

証明 p の十分小さい近傍 U と $\delta > 0$ をとると $I_\delta \times U$ 上で φ が定義されている。ここで $I_\delta = \{t \mid |t| < \delta\}$ である。$f \in C^\infty(M)$ に対し、$F : I_\delta \times U \to \mathbb{R}$ を $F(t,q) = f(\varphi(t,q)) = f(\varphi_t(q))$ で定義すると、F は可微分で、$F(0,q) = f(q)$ $(q \in U)$ である。ゆえに可微分関数 $G : I_\delta \times U \to \mathbb{R}$ が存在して、$(t,q) \in I_\delta \times U$ に対し $F(t,q) = f(q) + tG(t,q)$ あるいは

$$f \circ \varphi_t(q) = f(q) + t \cdot g_t(q) \quad (t \in I_\delta, q \in U)$$

の形に書ける。ここで g_t は $g_t(q) = G(t,q)$ で定義される可微分関数である。

$$\begin{aligned}(Xf)(q) = X_q f &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[f\circ\varphi_t(q) - f(q)]\\ &= \lim_{t\to 0} g_t(q) = g_0(q) \quad (q \in U)\end{aligned}$$

だから $g_0 = Xf$ である。p の近傍 V と $\epsilon > 0$ を十分小さくとってすべての $t \in I_\epsilon$ に対し $\varphi_t(V) \subset U$ を満たすようにしよう。このとき

$$\begin{aligned}\left((\varphi_t)_* Y_{\varphi_{-t}(p)}\right) f &= Y_{\varphi_{-t}(p)}(f\circ\varphi_t)\\ &= Y_{\varphi_{-t}(p)} f + t \cdot Y_{\varphi_{-t}(p)} g_t.\end{aligned}$$

が成り立つ。すると

$$\begin{aligned}&\frac{1}{t}\left[Y_p - (\varphi_t)_* Y_{\varphi_{-t}(p)}\right] f\\ &= \frac{1}{t}\left[Y_p f - Y_{\varphi_{-t}(p)} f\right] + \frac{1}{t}\left[Y_{\varphi_{-t}(p)} f - (\varphi_t)_* Y_{\varphi_{-t}(p)} f\right]\\ &= \frac{1}{t}\left[Y_p f - Y_{\varphi_{-t}(p)} f\right] - Y_{\varphi_{-t}(p)} g_t.\end{aligned} \tag{18}$$

(18) の右辺第一項は

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[Y_p f - Y_{\varphi_{-t}(p)} f\right] &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\,[(Yf)(\varphi_t(p)) - (Yf)(p)]\\ &= X_p(Yf)\end{aligned}$$

に収束。第二項は命題 6.4 により

$$Y_{\varphi_{-t}(p)} g_t = (Y g_t)(\varphi_{-t}(p)) = (\tilde{Y} G)(t, \varphi_{-t}(p))$$

に等しい。上式で $t = 0$ とおいて $Y_p g_0 = (\tilde{Y} G)(0, p)$ を得る。従って (18) の右辺第二項は

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} Y_{\varphi_{-t}(p)} g_t &= \lim_{t\to 0} (\tilde{Y} G)(t, \varphi_{-t}(p)) \\ &= (\tilde{Y} G)(0, p) \\ &= Y_p g_0 = Y_p (X f)\end{aligned}$$

に収束する。 □

定理 6.14. ベクトル場 X, Y について以下は同値である。ここで φ は X の生成する 1 パラメータ局所変換群とする。

1. $[\,X\,,\,Y\,] = 0$
2. I を 0 を含む開区間とする。すべての $t \in I$ に対して U 上で φ_t が定義されるならば

   $$(\varphi_t)_* Y = Y \quad (t \in I)$$

   つまり

   $$(\varphi_t)_* Y_p = Y_{\varphi_t(p)} \quad (t \in I, p \in U)$$

   が成り立つ。

証明 2. $\Longrightarrow$ 1. は公式 (17) から明らかなので、1. $\Longrightarrow$ 2. だけを示す。$p \in U, t \in I$ を任意にとり、以下ではこれを固定して考える。そして $t \geq 0$ の場合だけを考える ($t < 0$ の場合は同様にしてできるので省略する)。
開区間 $I' = \{s \mid -\delta < s < t + \delta\}$ を考え、これが I に含まれるように $\delta > 0$ を十分小さくとる。以下、$s \in I'$ とするが、このとき $t - s \in I'$ である。公式 (17) により

$$[\,X\,,\,Y\,]_{\varphi_{t-s}(p)} = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u} \left[Y - (\varphi_u)_* Y \right]_{\varphi_{t-s}(p)}.$$

ゆえに $q = \varphi_t(p)$ とおくと

$$\left((\varphi_s)_* [\,X\,,\,Y\,]\right)_q = \lim_{u\to 0} \frac{1}{u} \left[(\varphi_s)_* Y - (\varphi_{s+u})_* Y \right]_q.$$

つまりベクトル値関数 $v : I' \to T_q M$ を

$$v(s) = \left((\varphi_s)_* Y\right)_q$$

で定義すると、v は可微分で、

$$v'(s) = -\left((\varphi_s)_* [\,X\,,\,Y\,]\right)_q$$

が成り立つ。よって $[\,X\,,\,Y\,] = 0$ ならば $v'(s) = 0$ ($s \in I'$) で $v(s) = \text{const.} = v(0)$ となる。すなわち

$$\left((\varphi_s)_* Y\right)_q = Y_q. \tag{19}$$

(19) で $s = t$ とおいて (16) を得る。 □

命題 6.15. $X_1,\dots,X_r \in \mathfrak{X}(M)$ とし、$\varphi^{(i)}$ を X^i の生成する 1 パラメータ局所変換群とする ($i = 1\dots r$)。s を正整数とする。このとき点 p の任意の近傍 U に対して 0 を含む区間 I と p の近傍 V を十分小さくとると、任意の $t_1\dots t_s \in I, i_1\dots i_s \in \{1\dots r\}, q \in V$ に対して

$$\varphi^{(i_1)}_{t_1} \circ \varphi^{(i_2)}_{t_2} \circ \cdots \circ \varphi^{(i_s)}_{t_s}(q) \tag{20}$$

が定義され、かつその値は U に含まれる。

$X_1,\dots,X_r$ が互いに可換ならば、 (20) において $\varphi^{(i)}_t$ の順序を任意に変えても値は不変である。

証明 s に関する帰納法で容易に証明できるので読者に委ねたい。
後半の主張は定理 6.12 と定理 6.14 から明らかである。 □

7 分布と積分多様体

■分布と分布の可微分性 M を n 次元多様体とする。M 上の r **次元の分布 (distribution)** とは M の各点 p に T_pM の r 次元部分空間 $\mathcal{D}_p$ を対応させる写像 $\mathcal{D} : p \in M \mapsto \mathcal{D}_p(\subset T_pM)$ をいう。

分布 $\mathcal{D}$ が可微分であるということを以下でベクトル場を用いて定義しよう。

M 上のベクトル場 X はすべての点 p で $X_p \in \mathcal{D}_p$ を満たすとき、**分布 $\mathcal{D}$ に属する**ということにする。

分布 $\mathcal{D}$ に属するベクトル場全体の集合を $\mathsf{V}(\mathcal{D})$ で表すと、容易に分かるように、これはベクトル場全体のつくる $C^\infty(M)$-加群 $\mathfrak{X}(M)$ の部分加群である。そして、各点 p に対して $\mathsf{V}(\mathcal{D})_p$ を

$$\mathsf{V}(\mathcal{D})_p = \{X_p \in T_pM \mid X \in \mathsf{V}(\mathcal{D})\}$$

で定義すると、$\mathsf{V}(\mathcal{D})_p$ は $\mathcal{D}_p$ の部分ベクトル空間になる。

すべての点 p でこの $\mathsf{V}(\mathcal{D})_p$ が $\mathcal{D}_p$ に一致するとき、**分布 $\mathcal{D}$ は可微分である**ということにする。言い換えると、$\mathcal{D}$ が可微分であるとは、任意の接ベクトル $v \in \mathcal{D}_p$ に対して $\mathcal{D}$ に属するベクトル場 X が存在して、$X_p = v$ を満たすことである。

U を M の開集合とすると、U の各点 p で T_pU と T_pM とは同一視できるから、M の分布 $\mathcal{D}$ に対して、**$\mathcal{D}$ の U への制限**をいつでも定義することができる。これを $\mathcal{D}|_U$ と書く。

命題 7.1. U を M の開集合、$\mathcal{D}$ を分布とする (可微分とは仮定しない)。任意の $p \in U$ に対し p の近傍 $W(\subset U)$ を十分小さくとると、$\mathcal{D}|_U$ に属する任意のベクトル場 X は $\mathcal{D}$ に属するベクトル場 $\tilde{X}$ と W 上で一致する：$\tilde{X}|_W = X|_W$ 。

証明 p の近傍 V, W と U 上の可微分関数 h で $W \subset V, \overline{V} \subset U, h(q) = 1\ (q \in W), h(q) = 0\ (q \in U \setminus \overline{V})$ を満たすものがある。M 上のベクトル場 $\tilde{X}$ を

$$\tilde{X}_q = h(q)X_q \quad (q \in U),$$
$$\tilde{X}_q = 0 \quad (q \notin \overline{V})$$

で定義すると、$\tilde{X}$ は well-defined で可微分。定義から $\in \mathsf{V}(\mathcal{D}), \tilde{X}|_W = X|_W$ は明らかである。 □

命題 7.2. 分布 $\mathcal{D}$ が可微分ならば、その 任意の開集合 U への制限 $\mathcal{D}|_U$ も可微分である。

反対に $M = \bigcup_a U_a$ を開被覆とし、分布 $\mathcal{D}$ の各 U_a への制限 $\mathcal{D}|_{U_a}$ が可微分ならば、$\mathcal{D}$ は可微分である。

証明 前半は明らか。 後半も命題 7.1 を使えば、容易に証明できるので、読者に委ねる。 □

命題 7.3. r 次元の分布 $\mathcal{D}$ は以下のとき、かつそのときに限って可微分である：各点 p で p の近傍 U と U 上のベクトル場 $X_1, \ldots, X_r \in \mathfrak{X}(U)$ があって、すべての点 $q \in U$ で $(X_1)_q, \ldots, (X_r)_q$ が $\mathcal{D}_q$ の基底になる。

証明 始めに $\mathcal{D}$ は可微分であると仮定する。$\mathcal{D}_p$ の基底 $v_1, \ldots, v_r$ を選んでおくと、可微分性から $\mathcal{D}$ に属するベクトル場 $Y_1, \ldots, Y_r$ が存在して、$(Y_i)_p = v_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ を満たす。すなわち、$(Y_1)_p, \ldots, (Y_r)_p$ は一次独立であるが、ベクトル場の連続性からこのことは p の近傍 U の各点 q において $(Y_1)_q, \ldots, (Y_r)_q$ が一次独立であることを意味する。よって Y_i を U に制限したものを X_i と書けば、$X_1, \ldots, X_r$ は U の各点 q で $\mathcal{D}_q$ の基底になる。次に逆に命題の条件が満たされていると仮定する。このとき、任意の $v \in \mathcal{D}_q$ $(q \in U)$ は $v = \sum_i c^i (X_i)_q$ と表されるから、$X = \sum_i c^i X_i$ とおくと、X は $\mathcal{D}|_U$ に属し、かつ $X_q = v$ を満たす。すなわち、$\mathcal{D}|_U$ は可微分である。ところが M の各点 p がこのような近傍 U をもつから、命題 7.2 により $\mathcal{D}$ は可微分である。 □

上の命題のベクトル場 $X_1, \ldots, X_r$ を分布 $\mathcal{D}$ の点 p における**局所基 (local basis)** という。

以下ではとくに断らないかぎり、分布は可微分であると仮定する。

■**積分多様体**　$\mathcal{D}$ を M の分布とする。M の部分多様体 N は N の各点 p で

$$\iota_*(T_p N) \subset \mathcal{D}_p$$

が成り立つとき、$\mathcal{D}$ の**積分多様体 (integral manifold)** と呼ばれる。

与えられた r 次元の分布 $\mathcal{D}$ と点 $p \in M$ に対して、p を通る r 次元の積分多様体が存在する保証はない。任意の $p \in M$ に対して p を通る r 次元の積分多様体が存在するとき、分布は**完全積分可能 (completely integrable)** と言われる。

分布が完全積分可能であるための必要十分条件は以下で述べられる。

■**包合的な分布**　分布 $\mathcal{D}$ は $\mathcal{D}$ に属する任意のベクトル場 X, Y に対して $[X, Y]$ がまた $\mathcal{D}$ に属するとき、言い換えると、$\mathsf{V}(\mathcal{D})$ が $\mathfrak{X}(M)$ の部分リー代数となるとき、**包合的 (involutive)** であるという。

命題 7.4. 分布 $\mathcal{D}$ が包合的ならば、それの開集合 U への制限 $\mathcal{D}|_U$ もつねに包合的である。

反対に $M = \bigcup_a U_a$ を開被覆とし、$\mathcal{D}|_{U_a}$ がすべて包合的ならば、$\mathcal{D}$ は包合的である。

証明 容易に証明できることなので、読者に委ねる。 □

定理 7.5. 分布 $\mathcal{D}$ について以下は同値である。

1. $\mathcal{D}$ は包合的である。
2. $\mathcal{D}$ は M の各点で**可換局所基**をもつ。つまり、各点 p の近傍 U と U 上で定義された $\mathcal{D}$ の局所基 $X_1, \ldots, X_r$ で $\left[X_i, X_j\right] = 0$ $(i, j = 1 \ldots r)$ を満たすものが存在する。

証明 1. ⇒ 2.： $p \in M$, $Y_1, \ldots, Y_r$ を p の座標近傍 $(V, x^1 \ldots x^n)$ で定義された局所基とする。

$$Y_i = \sum_{j=1}^{n} \eta_i^j \left(\partial/\partial x^j\right) \quad (i = 1, \ldots, r).$$

ここで行列 $\left(\eta_i^j(q)\right)_{i=1\ldots r, j=1\ldots n}$ の階数は r だから、必要なら $x^1 \ldots x^n$ を並べ替えることで最初の r 列から作られる行列が正則なるようにできる。このとき p の近傍 $U(\subset V)$ の各点 q で行列 $\left(\eta_i^j(q)\right)_{i,j=1\ldots r}$ は正則である。逆行

列を $\left(\beta_i^j(q)\right)_{i,j=1\ldots r}$ とし、$X_i = \sum_{k=1}^r \beta_i^k Y_k$ $(i = 1\ldots r)$ とおくと、

$$X_i = \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) + \left\{\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) \text{ の一次結合 } (j > r)\right\} \quad (i = 1\ldots r). \tag{21}$$

ここで $C^\infty(U)$ 上の一次結合を簡単に一次結合と呼んだ。
$X_1, \ldots, X_r$ は p における局所基である。よって包合性から U 上の関数 c_{ij}^k が存在して

$$\left[X_i, X_j\right] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k X_k \tag{22}$$

となる。(21) を使うと (22) は

$$\left[X_i, X_j\right] = \sum_{k=1}^r c_{ij}^k \left(\partial/\partial x^k\right) + \left\{\left(\partial/\partial x^l\right) \text{ の一次結合 } (l > r)\right\} \tag{23}$$

となる。一方、 (21) だけから

$$\left[X_i, X_j\right] = \left\{\left(\partial/\partial x^l\right) \text{ の一次結合 } (l > r)\right\} \tag{24}$$

の形になることは明らか。(23) と (24) を較べて $c_{ij}^k(q) = 0$ を得る。ゆえに $\left[X_i, X_j\right] = 0$ となる。したがって $X_1, \ldots, X_r$ が求める可換局所基である。
2. ⇒ 1.：$p \in M$, $X_1, \ldots, X_r$ を p の近傍 U で定義された可換局所基とする。U 上で定義された $\mathcal{D}$ に属する任意のベクトル場 $Y = \sum \eta^i X_i$, $Z = \sum \zeta^j X_j$ に対して

$$\begin{aligned}[Y, Z] &= \sum_{i,j=1}^r \left[\eta^i X_i, \zeta^j Y_j\right] \\ &= \sum_{i,j=1}^r \left(\eta^i (X_i \zeta^j) X_j - \zeta^j (X_j \eta^i) X_i\right)\end{aligned} \tag{25}$$

を得る。(25) から $\mathcal{D}|_U$ が包合的なのは明らかである。そして各点 p がこのような近傍 U をもつから $\mathcal{D}$ は包合的である。 □

命題 7.6. 分布 $\mathcal{D}$ は完全積分可能ならば包合的である。すなわち包合性は完全積分可能であるための必要条件である。

証明 任意の点 p における可換局所基の存在を言えればいい。
N を p を通る r 次元積分多様体とする。$(U, x^1 \ldots x^r)$ を p の N での座標近傍とすると、$\left(\partial/\partial x^1\right)\ldots(\partial/\partial x^r)$ が求める可換局所基になる。 □

じつは包合性は完全積分可能であるための十分条件でもあるというのがこれから述べる主張である。
その前に便利な言葉を用意しておこう。
$(U, x^1 \ldots x^n)$ を p を中心とする半径が a の立方座標近傍とする。$\left|c^i\right| < a$ $(i = 1\ldots n-r)$ とするとき、r 次元正規部分多様体

$$\left\{q \in U \mid x^{r+1}(q) = c^1, \ldots, x^n(q) = c^{n-r}\right\}$$

を U の r 次元の**切片 (section)** と呼ぶ。

定理 7.7 (Frobenius). M 上の r 次元分布 $\mathcal{D}$ に対して以下は互いに同値である。

1. $\mathcal{D}$ は完全積分可能である (任意の点 p に対して p を通る r 次元積分多様体が存在する)。
2. $\mathcal{D}$ は包合的である。
3. 任意の点 $p \in M$ に対して、p を中心とする立方座標近傍 $(U, x^1 \dots x^n)$ を選んで、U の r 次元の各切片 (正規部分多様体) がすべて $\mathcal{D}$ の積分多様体になるようにできる。

証明 1. $\Rightarrow$ 2. は既に示した。また 3. $\Rightarrow$ 1. は明らかである。よって 2. $\Rightarrow$ 3. だけを示せばよい。
$(V, y^1 \dots y^n)$ を p を中心とする立方座標近傍、$X_1, \dots, X_r$ を V 上で定義された可換局所基とする。ここで

$$(X_1)_p \dots (X_r)_p, \left(\partial/\partial y^{r+1}\right)_p, \dots (\partial/\partial y^n)_p$$

が一次独立であると仮定してもよい。$\left\{\varphi_t^{(i)}\right\}$ を X_i の生成する V の 1 パラメータ局所変換群とすると、十分小さい数 $\delta > 0$ があって、V の半径が δ の部分を W とすると、任意の $q \in W$ と $|t_k| < \delta$ なる任意の $(t_1 \dots t_r)$, $i_k \in \{1 \dots r\}$ なる任意の $(i_1 \dots i_r)$ に対し、

$$\varphi_{t_1}^{(i_1)} \circ \varphi_{t_2}^{(i_2)} \circ \dots \varphi_{t_r}^{(i_r)}(q) \in V$$

が成り立つ。

$$N = \{q \in W \mid x^1(q) = \dots x^r(q) = 0\},$$

$$x^j = y^j|_N \quad (j > r)$$

とおくと、N は多様体で、x^j は N の座標関数である。$f : Q^r(\delta) \times N \to V$ を

$$f(x^1 \dots x^r, q) = \varphi_{x^1}^{(1)} \circ \varphi_{x^2}^{(2)} \circ \dots \circ \varphi_{x^r}^{(r)}(q)$$

で定義すると、f は可微分で、$\varphi_{x^1}^{(1)}, \varphi_{x^2}^{(2)}, \dots, \varphi_{x^r}^{(r)}(q)$ は可換だから、各 $k(\leq r)$ について

$$f_* \left(\partial/\partial x^k\right)_{x,q} = (X_k)_{f(x,q)} \quad ((x, q) \in Q^r(\delta) \times N)$$

が成り立つことが分かる。とくに

$$f_* \left(\partial/\partial x^k\right)_{0,p} = (X_k)_p \quad (k \leq r)$$

一方、$f(0, q) = q$ だから各 $j > r$ について

$$f_* \left(\partial/\partial x^j\right)_{0,p} = \left(\partial/\partial y^j\right)_p .$$

つまり f の p における階数は n である。よって δ を十分小さくとれば、f は $Q^r(\delta) \times N$ から p の M における近傍 U の上への微分同相になる。ここで $N \cong Q^{n-r}(\delta)$ を同一視すると、U は p を中心とする半径 δ の立方座標近傍、$f^{-1} : U \to Q^r(\delta) \times Q^{n-r}(\delta)(= Q^n(\delta))$ は座標写像で、$u^1 \dots u^n$ が座標関数になる。U 上で

$$\left(\partial/\partial x^k\right)_q = (X_k)_q \quad (k \leq r)$$

となることは明らかである。すなわち、各切片は積分多様体である。 □

定理の最後に述べた条件を満たす立方座標近傍は分布 $\mathcal{D}$ に**従属している**と言うことにする。

■分布と葉層構造　r 次元の分布 $\mathcal{D}$ が完全積分可能ならば、任意に与えた点 $p \in M$ を通る $\mathcal{D}$ の r 次元積分多様体 N が存在する。

ベクトル場に対する積分曲線と同様、一つの点 p を通る r 次元積分多様体 N はある意味で一意に決まるということが言える。すなわち N_1, N_2 を点 p を通る二つの r 次元積分多様体とすると、N_1 と N_2 は p の "近傍" で一致する。以上のことを正確に述べると

補題 7.8. $\mathcal{D}$ を完全積分可能な r 次元の分布、$p \in M$、$(U, x^1 \dots x^n)$ を $\mathcal{D}$ に従属する p を中心とした立方座標近傍とする (半径を a とする)。

p を通る任意の r 次元積分多様体 N に対して、$(U, x^1 \dots x^n)$ の半径 a を十分小さく制限するならば、p を通る U の r 次元切片は N の開部分多様体になる。

証明 $U \cap N$ は N の開集合だから、p の N における座標近傍 $(V, u^1 \dots u^r)$ で、$u^1(p) = \cdots = u^r(p) = 0$、$V \subset U$ となるものが存在する。$\iota : V \to M$ を自然な埋め込みとすると

$$\iota_*(\partial/\partial u^j)_q \in \mathcal{D}_q \quad (j = 1, \dots, r, q \in V)$$

だから r^2 個の関数 (α^k_j) があって

$$\iota_*(\partial/\partial u^j)_q = \sum_{k=1}^{r} \alpha^k_j(q)(\partial/\partial x^k)_q \quad (j = 1 \dots r) \tag{26}$$

さて、$y^i = x^i|_V = \iota^* x^i$ $(i = 1 \dots n)$ としよう。y^i は V 上の可微分関数である。
(26) から各 $q \in V$ で

$$\begin{aligned}\left(\partial/\partial u^j\right)_q y^i &= \left(\iota_*\left(\partial/\partial u^j\right)_q\right) x^i \\ &= \begin{cases}\alpha^i_j(q) & (i \le r) \\ 0 & (i > r)\end{cases} \\ (j = 1 \dots r,\ q \in V)\end{aligned}$$

行列 $(\alpha^k_j(p))_{j,k=1\dots r}$ は正則だから、V を十分小さく制限すると $y^1, \dots, y^r$ がまた V 上の座標関数になる。しかも $y^i(p) = x^i(p) = 0$ $(i = 1 \dots r)$ だから $(V, y^1 \dots y^r)$ としては p を中心とする立方座標近傍が選べる (半径を δ とする)。
V の各点 q で $(\partial/\partial y^j)_q$ $(j = 1 \dots r)$ は $(\partial/\partial u^1)_q, \dots, (\partial/\partial u^r)_q$, の線形結合だから、$i > r$ とすると、

$$\left(\partial/\partial y^j\right)_q y^i = 0.$$

すなわち V 上で $y^i = \text{const.} = 0$ $(i > r)$ となり、V は p を通る U の切片に含まれることが証明される。
よって U を半径が δ の範囲に制限してやるならば、N の開部分多様体 V は U の p を通る切片に (集合として) 一致する。しかも V の位相と可微分構造は切片のそれに一致する。 □

補題 7.9. $\mathcal{D}$ を 完全積分可能な r 次元の分布とし、N_1, N_2 を $\mathcal{D}$ の r 次元積分多様体とする。このとき $N_1 \cap N_2$ は N_1, N_2 双方の開部分多様体である。

証明 補題 7.8 より、$N_1 \cap N_2$ の各点 p に対して N_1 の開部分多様体 V_1 と N_2 の開部分多様体 V_2 で $V_1 = V_2$ を満たすもののあることが分かる。よって $N_1 \cap N_2$ は N_1, N_2 双方の開集合で、N_1 の部分空間としての $N_1 \cap N_2$

の位相と N_2 の部分空間としての $N_1 \cap N_2$ の位相は一致する。さらに N_1 の部分多様体としての $N_1 \cap N_2$ の可微分構造と N_2 の部分多様体としての $N_1 \cap N_2$ の可微分構造は一致する。 □

定理 7.10. $\mathcal{D}$ を 完全積分可能な r 次元の分布とする。このとき 任意の点 p に対して p を通る $\mathcal{D}$ の r 次元極大連結積分多様体 F_p が唯一つ存在する。しかも p を通る r 次元連結積分多様体はすべて F_p の開部分多様体である。

証明 $\{ N_a \}$ を p を通る r 次元連結積分多様体ぜんぶのつくる集合とし、

$$F_p = \bigcup_a N_a$$

とおく。補題 7.9 からすべての N_a が F_p の開部分多様体になるという条件で F_p の位相と可微分構造が一意に決まるのだが、F_p がハウスドルフ空間であることを証明する必要がある。そしてここでも補題 7.8 が使用される。

$q_1, q_2 \in F_p, q_1 \neq q_2$ とする。F_p の定義から p を通る r 次元連結積分多様体 N_1, N_2 があって $q_1 \in N_1, q_2 \in N_2$ である。

補題 7.8 により、$\mathcal{D}$ に従属し q_i を中心とする立方座標近傍 U_i を、q_i を通る U_i の切片 V_i が N_i の開部分多様体になるように選ぶ ($i = 1, 2$)。ここで $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ なるように十分小さく選ぶことができるから、このとき $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ である。V_1, V_2 は F_p の開集合だからこうして F_p がハウスドルフ空間であることが示される。

F_p が $\mathcal{D}$ の r 次元積分多様体であることは明らかであろう。また N_a がすべて連結で一点 p を共有することから、F_p の連結性も明らかである。

N を別の r 次元連結積分多様体で $F_p \subset N$ とすれば、N は点 p を含むから F_p の 定義より $N \subset F_p$ でなければならない。ゆえに $F_p = N$ である。すなわち F_p は r 次元極大連結積分多様体である。点 p を通る r 次元極大連結積分多様体の一意性は明らかであろう。 □

完全積分可能な r 次元の分布 $\mathcal{D}$ に対して、$\mathcal{D}$ の r 次元積分多様体で、極大連結なものを $\mathcal{D}$ の**葉 (leaf, feuille[仏])** という。定理 7.10 は任意の点 p に対して、p を通る葉が一意的に存在することを主張している。

$\left\{ F_p \right\}$ を $\mathcal{D}$ の葉ぜんぶの集合とすると、$\left\{ F_p \right\}$ は次の性質を満たす。

1. $F_p \neq F_q$ ならば $F_p \cap F_q = \emptyset$ である。
2. $M = \bigcup_p F_p$
3. 任意の点 $p \in M$ に対して、p を中心とする立方座標近傍 $(U, x^1 \dots x^n)$ を適当にとると、U の各切片はそれぞれある F_q に含まれている。

練習問題 7.1. 今述べたことを確認せよ。

一般に多様体 M の r 次元連結部分多様体の集まり $\{ F_a \}$ が

1. $F_a \neq F_b$ ならば $F_a \cap F_b = \emptyset$ である。
2. $M = \bigcup_a F_a$
3. 任意の点 $p \in M$ に対して、p を中心とする立方座標近傍 $(U, x^1 \dots x^n)$ を適当にとると、U の各切片はそれぞれある F_a に含まれている。

という性質を満たすとき、$\{ F_a \}$ を M の r 次元の**葉層構造**という。

完全積分可能な r 次元分布の葉たちは M の r 次元葉層構造を定義する。

逆に M の r 次元葉層構造 $\{F_a\}$ が与えられたら、そこから完全積分可能な r 次元分布 $\mathcal{D}$ を定義することも可能である。つまり各 $p \in M$ に対し、p を通る元 F_a が一意に決まるから、

$$\mathcal{D}_p = T_p F_a$$

で定義すれば r 次元の分布が得られる。このようにして得られた分布 $\mathcal{D}$ の微分可能性ならびに完全積分可能性の証明は読者に委ねる。

参考文献

[1] 服部晶夫 「多様体 増補版 (岩波全書)」岩波書店

[2] 松本幸夫 「多様体の基礎 (基礎数学 5)」東京大学出版会

[3] 松島与三 「多様体入門 (数学選書 5)」裳華房

[4] 森田茂之 「微分形式の幾何学 1 (岩波講座現代数学の基礎 25)」岩波書店

[5] S. Kobayashi and K. Nomizu, “Foundations of differential geometry I”, John Willey & Sons, inc.

[6] S. Sternberg, “Lectures on differential geometry”, Chelsea