テンソル代数、外積代数とクリフォード代数入門 (つづき)

木原浩貴

2010 年 11 月 2 日

5　外積代数

5.1　外積代数とその性質

■外積代数の定義　V を K 上のベクトル空間とする。テンソル代数 $\mathrm{T}(V)$ を考え、x^2 ($x \in V$) のかたちの $\mathrm{T}(V)$ の元が生成する両側イデアルを $\mathcal{I}$ と書こう：

$$\mathcal{I} = \left\{ \sum v x^2 w \,\middle|\, x \in V, v, w \text{ は } \mathrm{T}(V) \text{ の純テンソル} \right\}$$

ここから明らかなように、$\mathcal{I}$ は $\mathbb{Z}$ 型の次数付きイデアルである。

そこで、次数付き代数の商

$$\mathrm{T}(V)/\mathcal{I} = \oplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{T}^p(V)/\mathcal{I}^p$$

をとり、これを V の**外積代数 (exterior algebra)** または**グラスマン代数 (Grassmann algebra)** と呼ぶ。ここで

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^p &= \mathrm{T}^p(V) \cap \mathcal{I} \\ &= \{ \sum v x^2 w \mid x \in V, v \text{ は } s \text{ 次の純テンソル}, w \text{ は } p - s - 2 \text{ 次の純テンソル} \} \end{aligned}$$

である。以下では、$\wedge(V) = \mathrm{T}(V)/\mathcal{I}$, $\wedge^p(V) = \mathrm{T}^p(V)/\mathcal{I}^p$ と記すことにする。すると

$$\wedge(V) = \oplus_{p \in \mathbb{Z}} \wedge^p (V).$$

■普遍写像性質　イデアル $\mathcal{I}$ の定義から明らかに $\mathcal{I}^0 = \mathcal{I}^1 = 0$ だから $\wedge^0(V) \simeq \mathrm{T}^0(V) = K$, $\wedge^1(V) \simeq \mathrm{T}^1(V) = V$ が成り立つ。すなわち、K, V を $\wedge(V)$ の部分空間と考えることができる (K は単位的部分代数とも考えられる)。

$\alpha : V \to \mathrm{T}(V)$ を自然な単射、$\pi : \mathrm{T}(V) \to \wedge(V)$ を自然な全射、$\beta : V \to \wedge(V)$ を $\beta = \pi \circ \alpha$ で定義される写像とすると、β は単射である。これを自然な単射と呼ぼう。

命題 5.1 (普遍写像性質). $\beta : V \to \wedge(V)$ を自然な単射とすると、$\beta(x)^2 = 0$ ($x \in V$) が成り立つ。

さらに F を K 上の任意の単位的結合的代数、$f : V \to F$ を $f(x)^2 = 0$ ($x \in V$) を満たす K-線形写像とすると、$f = f' \circ \beta$ を満たす (下図を可換にする) 単位的準同型 $f' : \wedge(V) \to F$ が唯一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "f"'] & \wedge(V) \arrow[d, "f'"] \\ & F \end{tikzcd}$$

F が $\mathbb{Z}$ 型の次数付き代数で、$f(V) \subset F_1$ ならば、f' は次数付き代数の準同型である。

証明 $x \in V$ に対して $\beta(x)^2 = \pi(x)^2 = \pi(x^2) = 0$。
テンソル代数の普遍写像性質により、f に対して $f = f'' \circ \alpha$ となる単位的準同型 $f'' : \mathrm{T}(V) \to E$ が唯一つ存在する。
$f' : \wedge(V) \to E$ を単位的準同型とすると、$f = f' \circ \beta \Longleftrightarrow f' \circ \pi = f''$ が成り立つ。
そこで $f' \circ \pi = f''$ を満たす f' の存在と一意性を示せばいい。このうち (π は全射だから) f' の一意性は明らかである。
f' の存在を示すと、$f''(x^2) = f''(x)^2 = f(x)^2 = 0$ だから $\mathfrak{I} \subset \operatorname{Ker} f''$ で、$f' : \wedge(V) \to F$ が $f'(\pi(x)) = f''(x)$ により定義される。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \mathrm{T}(V) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[ddl, bend left, "f''"] \\
& \wedge(V) \arrow[d, "f'"] & \\
& F &
\end{tikzcd}$$

□

系 5.2. $f : V \to W$ を線形写像、$\beta : V \to \wedge(V), \gamma : W \to \wedge(W)$ を自然な単射とする。このとき、$\wedge f \circ \beta = \gamma \circ f$ を満たす単位的準同型 $\wedge f : \wedge(V) \to \wedge(W)$ が唯一つある。$\wedge f$ は次数付き代数の準同型である。

$\wedge f$ を **f が引き起こす外積代数の準同型**と呼ぶ。
次数付き代数の任意の単位的準同型 $f' : \wedge(V) \to \wedge(W)$ は唯一つの線形写像 $f : V \to W$ に対して f の引き起こす準同型である。実際、f を f' の $V(= \wedge^1(V))$ への制限とすると、$f : V \to W$ は線形写像であり、$f' = \wedge f$ となることは明らかである。

■積の交代性　$\wedge(V)$ の元を V 上の**多ベクトル (multi-vector)** とも呼ぶ。とくに $\wedge^p(V)$ の元は **p-ベクトル**と呼ぶ。$x_1, \cdots, x_p \in V$ に対して $\pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)$ を $x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ と書く。この形の多ベクトルを $\wedge(V)$ の **純・多ベクトル (pure multi-vector)** と呼ぶ。$\wedge(V)$ の任意の元は純・多ベクトルの有限和の形に表すことができる。
V の元に限らず、$\wedge(V)$ の任意の二元 x, y に対しても、その積を $x \wedge y$ と書くことがある。

命題 5.3. $\wedge(V)$ において、$x, y \in V$ ならば

$$x^2 = 0, \quad xy = -yx$$

が成り立つ。一般に $x \in \wedge^p(V), y \in \wedge^q(V)$ に対しては

$$xy = (-1)^{pq} yx$$

が成り立つ。
p が偶数ならば、$x \in \wedge^p(V)$ は $\wedge(V)$ のすべての元と可換である (中心にある)。
p が奇数ならば、$x \in \wedge^p(V)$ は $x^2 = 0$ を満たす。

証明 まず $x \in V$ ならば $x^2 = \beta(x)^2 = 0$。
ゆえに $x, y \in V$ ならば $0 = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = xy + yx$. すなわち $xy = -yx$.

ここから任意の $x_i, y_i \in V$ に対して

$$x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge y_1 \wedge \cdots \wedge y_q = (-1)^{pq} y_1 \wedge \cdots \wedge y_q \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$$

となることは明らか。したがって一般に $x \in \wedge^p(V), y \in \wedge^q(V)$ に対して $xy = (-1)^{pq}yx$。
p が偶数ならば、任意の q と $y \in \wedge^q(V)$ に対して $xy = (-1)^{pq}yx = yx$ だから、$\wedge(V)$ の中心の元である。
次に p を奇数とする。純 p-ベクトル $x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p, y = y_1 \wedge \cdots \wedge y_p$ $(x_i, y_i \in V)$ に対して

$$\begin{aligned} x^2 &= x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_p = \cdots \\ &= (-1)x_1 \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_p = 0. \end{aligned}$$

$$xy + yx = xy + (-1)xy = 0.$$

任意の $x \in \wedge^p(V)$ は 純 p-ベクトル x_k の和 $x = \sum_k x_k$ だから

$$x^2 = \sum_k {x_k}^2 + \sum_{k<l}(x_k x_l + x_l x_k) = 0.$$

□

■直和と捩れテンソル積　V_1, V_2 を K-ベクトル空間とする。ここでは次数付き代数 $\wedge(V_1 \oplus V_2)$ から次数付き代数 $\wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge(V_2)$ の上へのカノニカルな同型の存在を示す。

命題 5.4. $\varphi(x + x') = x \otimes 1 + 1 \otimes x'$ $(x \in V_1, x' \in V_2)$ を満たす単位的準同型 $\varphi : \wedge(V_1 \oplus V_2) \to \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge(V_2)$ が唯一つある。φ は次数付き代数の同型である。すなわち

$$\begin{aligned} &\wedge(V_1 \oplus V_2) \simeq \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge(V_2), \\ &\quad x + x' \mapsto x \otimes 1 + 1 \otimes x' \quad (x \in V_1, x' \in V_2) \end{aligned}$$

証明 写像 $\beta : V_1 \oplus V_2 \to \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge(V_2)$ を

$$\beta(x + x') = x \otimes 1 + 1 \otimes x'$$

により定義すると、β は線形であり、$(\beta(x + x'))^2 = 0$ を満たす。実際、任意の $x \in V_1$, $x' \in V_2$ に対して

$$\begin{aligned} &(x \otimes 1 + 1 \otimes x')^2 \\ &= (x \otimes 1)^2 + (1 \otimes x')^2 + (x \otimes 1)(1 \otimes x') + (1 \otimes x')(x \otimes 1) \\ &= (x^2 \otimes 1) + (1 \otimes x'^2) + x \otimes x' - x \otimes x' \end{aligned}$$

である。ここで末項の符号が負になっているのは、捩れテンソル積の性質である。$x^2 = x'^2 = 0$ だから、$(x \otimes 1 + 1 \otimes x')^2 = 0$. すなわち $(\beta(x + x'))^2 = 0$ である。
ゆえに $\beta' : V_1 \oplus V_2 \to \wedge(V_1 \oplus V_2)$ を自然な単射とすれば、$\beta = \varphi \circ \beta'$ 言い換えると $\varphi(x + x') = x \otimes 1 + 1 \otimes x'$ $(x \in V_1, x' \in V_2)$ を満たす単位的準同型 $\varphi : \wedge(V_1 \oplus V_2) \to \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge(V_2)$ が唯一つ存在するはずである。

$$\begin{tikzcd} V_1 \oplus V_2 \arrow[r, "\beta'"] \arrow[dr, "\beta"'] & \wedge(V_1 \oplus V_2) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge(V_2) \end{tikzcd}$$

φ は実は代数同型である。それを確かめるには次のことを示せば十分である：F を任意の単位的・結合的代数とし、$f : V_1 \oplus V_2 \to F$ を線形写像で $\bigl(f(x + x')\bigr)^2 = 0$ を満たすものだとする。このとき $f = f' \circ \beta$ となる単位的準同型 $f' : \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge (V_2) \to F$ が唯一つ存在する。

$\varepsilon_i : V_i \to V_1 \oplus V_2, \beta_i : V_i \to \wedge(V_i), \theta_i : \wedge(V_i) \to \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge (V_2)$ を自然な単射とすると、容易に分かるように、$\beta \circ \varepsilon_i = \theta_i \circ \beta_i$ $(i = 1, 2)$ が成り立つ。

仮定から $(f \circ \varepsilon_i(x))^2 = 0$ だから単位的準同型 $f'_i : \wedge(V_i) \to F$ で $f \circ \varepsilon_i = f'_i \circ \beta_i$ を満たすものが唯一つ存在する $(i = 1, 2)$。$f'_1(x) \cdot f'_2(x') = -f'_2(x') \cdot f'_1(x)$ が任意の $x \in V_1$, $x' \in V_2$ で成立する。ゆえに $f'_1(x) \cdot f'_2(x') = (-1)^{pp'} f'_2(x') \cdot f'_1(x)$ が任意の $x \in \wedge^p(V_1), x' \in \wedge^{p'}(V_2)$ で成り立つ。

そこで捩れテンソル積の普遍写像性質から単位的準同型 $f' : \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge (V_2) \to F$ で $f'_i = f' \circ \theta_i \quad (i = 1, 2)$ を満たすものの存在と一意性を導く。$f \circ \varepsilon_i = f' \circ \beta \circ \varepsilon_i$ $(i = 1, 2)$ だから、$f = f' \circ \beta$ である。逆に単位的準同型 $f'' : \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge (V_2) \to F$ が $f = f'' \circ \beta$ を満たすと、$f'' \circ \theta_i = f'_i$ $(i = 1, 2)$ であるから、$f'' = f'$ でなければならない。これで一意性も示せた。

$$\begin{tikzcd}
V_i \arrow[rr, "\beta_i"] \arrow[dr, "f\circ\varepsilon_i"] \arrow[dd, "\varepsilon_i"'] & & \wedge(V_i) \arrow[dl, "f'_i"'] \arrow[dd, "\theta_i"] \\
& F & \\
V_1 \oplus V_2 \arrow[rr, "\beta"'] \arrow[ur, "f"] & & \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge (V_2) \arrow[ul, "f'"']
\end{tikzcd}$$

□

系 5.5. V_1 を V の部分空間とし、$f : V_1 \to V$ を自然な単射とすると、f が引き起こす単位的準同型 $\wedge f : \wedge(V_1) \to \wedge(V)$ は単射である。したがって、$x \in \wedge(V_1)$ と $(\wedge f)(x) \in \wedge(V)$ とを同一視して、$\wedge(V_1) \subset \wedge(V)$ と思うことができる。

証明 V_1 の補空間 V_2 を一つとり、$V = V_1 \oplus V_2$ とする。φ を $\varphi(x + x') = x \otimes 1 + 1 \otimes x'$ $(x \in V_1, x' \in V_2)$ を満たす $\wedge(V)$ から $\wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge (V_2)$ の上への同型とする。

$f' : \wedge(V_1) \to \wedge(V_1) \hat{\otimes} \wedge (V_2)$ を $f'(x) = x \otimes 1$ $(x \in \wedge(V_1))$ により定義すると、f' は明らかに単位的準同型で、単射である。

$f' = \varphi \circ (\wedge f)$ が成り立つ。実際、$x \in V_1$ とすると $f'(x)$ と $\varphi \circ (\wedge f)(x)$ とは $f'(x) = x \otimes 1, \varphi \circ (\wedge f)(x) = \varphi(x + 0) = x \otimes 1$ となって一致する。したがってどちらも単位的準同型だから $\wedge(V_1)$ 上で一致する。

よって f' が単射だから $\wedge f$ も単射でなければならない。 □

■外積代数の係数拡大　V を K 上のベクトル空間、L を K の拡大体とする。テンソル代数におけるのと同様に、自然な同型 $L \otimes_K \wedge(V) \simeq \wedge(L \otimes_K V)$ の存在を示すことができる。

$\beta : V \to \wedge(V), \beta' : L \otimes_K V \to \wedge(L \otimes_K V)$ を自然な単射とし、$\beta^L : L \otimes_K V \to L \otimes_K \wedge(V)$ を β の L-線形写像への延長とする。

任意の $a, b \in L, x, y \in V$ に対して

$$(a \otimes \beta(x))^2 = a^2 \otimes \beta(x)^2 = 0,$$
$$(a \otimes \beta(x)) \cdot (b \otimes \beta(y)) + (b \otimes \beta(y)) \cdot (a \otimes \beta(x))$$
$$= ab \otimes \bigl(\beta(x)\beta(y) + \beta(y)\beta(x)\bigr) = 0$$

である。そして任意の $z \in L \otimes_K V$ は $z = a_1 \otimes x_1 + \cdots + a_n \otimes x_n$ の形だから、$\beta^L(z) = a_1 \otimes \beta(x_1) + \cdots + a_n \otimes \beta(x_n)$ となって、ここから $(\beta^L(z))^2 = 0$ は明らかである。

よって単位的 L-準同型 $\varphi : \wedge(L \otimes_K V) \to L \otimes_K \wedge(V)$ で $\beta^L = \varphi \circ \beta'$ を満たすものが唯一つ存在する。φ は

$$\varphi(1 \otimes x) = 1 \otimes x \quad (x \in V)$$

を満たす唯一の単位的 L-準同型と呼ぶことができる。

$$\begin{tikzcd}
L \otimes_K V \arrow[r, "\beta'"] \arrow[dr, "\beta^L"'] & \wedge(L \otimes_K V) \arrow[d, "\varphi"] \\
& L \otimes_K \wedge(V)
\end{tikzcd}$$

命題 5.6. φ は次数付き L-代数の単位的 L-同型である。

証明 次のことを示せばいい：任意の単位的・結合的 L-代数 F と $(f(z))^2 = 0$ $(z \in L \otimes_K V)$ を満たす L-線形写像 $f : L \otimes_K V \to F$ に対して、$f = f' \circ \beta^L$ を満たす単位的 L-準同型 $f' : L \otimes_K \wedge(V) \to F$ が唯一つ存在する。
$\tau : V \to L \otimes_K V, \tau' : \wedge(V) \to L \otimes_K \wedge(V)$ をそれぞれ $\tau(x) = 1 \otimes x$ $(x \in V), \tau'(x) = 1 \otimes x$ $(x \in \wedge(V))$ で定義される準同型とする。$f \circ \tau : V \to F$ は K-線形で、$(f \circ \tau(x))^2 = (f(1 \otimes x))^2 = 0$ だから $f \circ \tau = f'' \circ \beta$ を満たす単位的 K-準同型 $f'' : \wedge(V) \to F$ が唯一つ存在する。$f' : L \otimes_K \wedge(V) \to F$ を f'' の L-準同型への延長とする。すなわち $f'' = f' \circ \tau'$ を満たす唯一の L-準同型とする (f' は単位的である)。このとき $f \circ \tau = f'' \circ \beta = f' \circ \tau' \circ \beta = f' \circ \beta^L \circ \tau$ だから $f = f' \circ \beta^L$ である。このような f' が一意であることも同様にして示せる。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "f\circ\tau"] \arrow[dd, "\tau"'] & & \wedge(V) \arrow[dl, "f''"'] \arrow[dd, "\tau'"] \\
& F & \\
L \otimes_K V \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\beta^L"'] & & L \otimes_K \wedge(V) \arrow[ul, "f'"']
\end{tikzcd}$$

□

■交代的多重線形写像　ここで外積代数 $\wedge(V)$ の斉次成分 $\wedge^p(V)$ がもっている性質について述べよう。

$\wedge : V^p \to \wedge^p(V)$ を $\wedge(x_1, \cdots, x_p) = x_1 \wedge \cdots \wedge x_p$ で定義する。明らかに $\wedge$ は多重線形で

$$\wedge(\cdots, x, x, \cdots) = 0 \quad (x \in V)$$

という性質をもつ。

一般に W をベクトル空間とすると、多重線形写像 $f : V^p \to W$ は

$$f(\cdots, x, x, \cdots) = 0 \quad (x \in V)$$

を満たすとき、**交代的 (alternating)** と言われる。f が交代的ならば

$$f(\cdots, x, y, \cdots) = -f(\cdots, y, x, \cdots) \quad (x, y \in V)$$

が成り立つ。ここから容易にわかるように f が交代的であることは

$$f(\cdots, \overset{i}{x}, \cdots, \overset{j}{x}, \cdots) = 0 \quad (x \in V; i < j)$$

に同値である。

交代的多重線形写像 $f : V^p \to W$ ぜんたいのつくるベクトル空間を $\mathrm{A}(\,V^p\,;\,W\,)$ と記す。

命題 5.7. 任意の交代的多重線形写像 $f : V^p \to W$ に対して $f = f' \circ \wedge$ を満たす線形写像 $f' : \wedge^p(V) \to W$ が唯一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} V^p \arrow[r, "\wedge"] \arrow[dr, "f"'] & \wedge^p(V) \arrow[d, "f'"] \\ & W \end{tikzcd}$$

言い換えると線形写像 $f' \in \mathrm{L}(\,\wedge^p(V)\,,\,W\,) \mapsto f = f' \circ \wedge \in \mathrm{A}(\,V^p\,;\,W\,)$ は同型である。これを以下では自然な同型と呼ぶ。

証明 f に対して $f = f'' \circ \otimes$ となる線形写像 $f'' : \mathrm{T}^p(V) \to W$ が唯一つあり、$f' : \wedge^p(V) \to W$ (線形) とすると、$f = f' \circ \wedge \Longleftrightarrow f' \circ \pi = f''$ が成り立つ。
よって、$f' \circ \pi = f''$ となる f' の存在と一意性を示せばいいが、一意性は π が全射ゆえ明らかである。
あとは f' の存在を示すのみ：$s, t \geq 0,\ s + t = p - 2,\ v_i, w_i, x \in V$ とすると

$$f''(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s \otimes x \otimes x \otimes w_1 \otimes \cdots \otimes w_t) = f(v_1 \cdots v_s, x, x, w_1 \cdots w_t) = 0.$$

ゆえに f'' は $\mathcal{I}^p$ 上で 0 となって、$f' : \wedge^p(V) \to W$ が $f'(\pi(x)) = f''(x)$ で定義される。

$$\begin{tikzcd} V^p \arrow[rr, "\otimes"] \arrow[dr, "\wedge"] \arrow[ddr, bend right, "f"'] & & \mathrm{T}^p(V) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[ddl, bend left, "f''"] \\ & \wedge^p(V) \arrow[d, "f'"] & \\ & W & \end{tikzcd}$$

□

以下、同型 $\mathrm{L}(\,\wedge^p(V)\,,\,W\,) \simeq \mathrm{A}(\,V^p\,;\,W\,)$ は自然な同型の意味で考える。
特に $(\wedge^p(V))^* \simeq \mathrm{A}(\,V^p\,;\,K\,)$ が成り立つ。

付記 $\pi_p : \mathrm{T}^p(V) \to \wedge^p(V)$ は全射だから、それの双対である $\omega \in \wedge^p(V)^* \mapsto \omega \circ \pi_p \in \mathrm{T}^p(V)^*$ は単射であるが、これは自然な単射 $\mathrm{A}(\,V^p\,;\,K\,) \to \mathrm{L}(\,V^p\,;\,K\,)$ に対応している：

$$\omega(x_1, \ldots, x_p) = \omega(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \omega \circ \pi_p(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \omega \circ \pi_p(x_1, \cdots, x_p)$$

次に述べる補題は外積を扱う上で基本的である：

補題 5.8. $g \in \mathrm{A}(\,V^p\,;\,W\,),\ h \in \mathrm{A}(\,V^q\,;\,X\,)$ に対して $f \in \mathrm{L}(\,V^{p+q}\,;\,W \otimes X\,)$ を

$$f(x_N) = \textstyle\sum_{(I,J)} \mathrm{sgn}\binom{N}{I,J}\, g(x_I) \otimes h(x_J) \quad (x_N = (x_1, \cdots, x_n))$$

によって定義する。ここで $N = \{\,1, \cdots, p + q\,\}$, であり、$I, J$ はそれぞれ p 個、q 個の元から成る N の部分集合、I の元を大きさの順にならべて $i_1, \cdots, i_p$ としたときに $x_I = (x_{i_1}, \cdots, x_{i_p})$ と書く。x_J も同じ。(I, J) は集合 N の分割である：$I \cup J = N,\ I \cap J = \emptyset$。和はそのような組 (I, J) 全体に渡るものとする。

分かりやすく書き換えると、

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\textstyle\sum_{i_1<\cdots<i_p}\operatorname{sgn}(i_1\cdots i_p,j_1\cdots j_q)\,g(x_{i_1},\cdots,x_{i_p})\otimes h(x_{j_1},\cdots,x_{j_q}) \tag{1}$$

ここで sgn のあとの記号 $(i_1\cdots i_p,j_1\cdots j_q)$ は置換

$$\begin{pmatrix}1 & \cdots & p, & p+1 & \cdots & p+q\\ i_1 & \cdots & i_p, & j_1 & \cdots & j_q\end{pmatrix}$$

の略記である。

さてこのとき f は交代的である。つまり $f\in \mathrm{A}(V^{p+q};W\otimes X)$ である。

証明 各番号 a $(1\le a<p+q)$ について $x_a=x_{a+1}(=x)$ ならば、$f(x_N)=f(x_1,\cdots,x_{p+q})=0$ を示すのである。S を $\{1,\cdots,p+q\}$ の p 元より成る部分集合 I 全体とし、S を次のように分類する (以下で、J は I の補集合を表す)：$S_1=\{I\in S \mid a\in I,a+1\in I\}$, $S_2=\{I\in S \mid a\in J,a+1\in J\}$, $S_3=\{I\in S \mid a\in I,a+1\in J\}$, $S_4=\{I\in S \mid a\in J,a+1\in I\}$。
すると $f(x_N)=f(x_1,\cdots,x_{p+q})$ は $(\sum_{I\in S_1}+\sum_{I\in S_2}+\sum_{I\in S_3}+\sum_{I\in S_4})\operatorname{sgn}\binom{N}{I,J}g(x_I)\otimes h(x_J)$ と書けるが、g,h の交代性から $I\in S_1, I\in S_2$ ならばそれぞれ $g(x_I)=0, h(x_J)=0$ だから、$\sum_{I\in S_1}+\sum_{I\in S_2}$ の部分は 0 である。また S_3 に属する I とその補集合 J の間で、それぞれの持物である a と $a+1$ を交換させた結果、I,J がそれぞれ I',J' に変わったとすると、I' は S_4 に属する。対応 $I\to I'$ は S_3 から S_4 への双射で、$\operatorname{sgn}(I,J)=-\operatorname{sgn}(I',J')$, $x_I=x_{I'}$, $x_J=x_{J'}$ だから、$(\sum_{I\in S_3}+\sum_{I\in S_4})\operatorname{sgn}\binom{N}{I,J}g(x_I)\otimes h(x_J)=\sum_{I\in S_3}(\operatorname{sgn}\binom{N}{I,J}g(x_I)\otimes h(x_J)+\operatorname{sgn}\binom{N}{I',J'}g(x_{I'})\otimes h(x_{J'}))=0.$
したがって、$f(x_1,\cdots,x_{p+q})=0$ となる。 □

■外積代数の基底　ここでは $n=\dim V<\infty$ と仮定する。

補題 5.9. $e_1,\cdots,e_n$ を V の基底とすると、$e_1\wedge\cdots\wedge e_n\neq 0$。

証明 $e_1^*,\cdots,e_n^*$ を $e_1,\cdots,e_n$ に双対な V^* の基とし、$f:V^n\to K$ を $f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}e^*_{\sigma(1)}(x_1)\cdots e^*_{\sigma(n)}(x_n)$ により定義する。f は明らかに多重線形であり、次に示すように交代的である：$1\le i\le n-1$, $\tau\in\mathfrak{S}_n$ を互換 $\tau=(i\quad i+1)$ とすると、$f(x_1\cdots x_{i-1},x,x,x_{i+2}\cdots x_n)=\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n^+}e^*_{\sigma(1)}(x_1)\cdots e^*_{\sigma(i-1)}(x_{i-1})\cdot\left(e^*_{\sigma(i)}(x)e^*_{\sigma(i+1)}(x)-e^*_{\sigma(i+1)}(x)e^*_{\sigma(i)}(x)\right)\cdot e^*_{\sigma(i+2)}(x_{i+2})\cdots e^*_{\sigma(n)}(x_n)=0.$ ここで $\mathfrak{S}_n^+$ は偶置換ぜんぶから成る $\mathfrak{S}_n$ の部分群である。
故に $f=f'\circ\wedge$ となる線形写像 $f':\wedge^n(V)\to K$ が唯一つある。$f'(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)=f(e_1,\cdots,e_p)=1$ だから $e_1\wedge\cdots\wedge e_n\neq 0$ でなければならない。 □

命題 5.10. $e_1,\cdots,e_n$ を V の基底とする。このとき、$\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p} \mid 1\le i_1<\cdots<i_p\le n\}$ は $\wedge^p(V)$ の基底である。

したがって、$\dim\wedge^p(V)=\binom{n}{p}$ $(0\le p\le n)$, $\dim\wedge^p(V)=0$ $(p>n)$, $\dim\wedge(V)=2^n$ である。

証明 $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\}$ が $\wedge^p(V)$ を生成することは容易に分かる。だから後はこれが一次独立なることを示すだけである。
$\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}=0$ とする。$1<\cdots<n$ の p 元から成る任意の部分集合 $j_1<\cdots<j_p$ に対して $k_1<\cdots<k_{n-p}$ をその補集合とすると、積の交代性により $0=\sum_{i_1<\cdots<i_p}a_{i_1\cdots i_p}e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\wedge e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{n-p}}=a_{j_1\cdots j_p}e_{j_1}\wedge\cdots\wedge e_{j_p}\wedge e_{k_1}\wedge\cdots\wedge e_{k_{n-p}}=\pm a_{j_1\cdots j_p}e_1\wedge\cdots\wedge e_n.$
$e_1\wedge\cdots\wedge e_n\neq 0$ だから $a_{j_1\cdots j_p}=0$ でなければならない。すなわち $\{e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p}\}$ は一次独立である。 □

練習問題 5.1. (興味のある人だけ) $\dim V = \infty$ を含む一般の場合に、$\{ e_i \}_{i \in I}$ を V の基底とし、I を全順序集合とする。このとき $\{ e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} \mid i_k \in I, i_1 < \cdots < i_p \}$ が $\wedge^p(V)$ の基底となることを証明せよ。

■行列表示　やはり $n = \dim V < \infty$ と仮定する。$e = (e_1, \cdots, e_n)$ を V の順序基とする。順序基を本書では**枠 (frame)** とも呼ぶ。p 元からなる $\{ 1, \cdots, n \}$ の部分集合 I 全体を S_p^n または n を略して S_p と書く。$I \in S_p$ に対して、I の元を昇順に並べたものを $i_1, \cdots, i_p$ とし、$e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ とおく。今後、$I = (i_1, \cdots, i_p)$ と書けば、それは I が $i_1, \cdots, i_p$ から成る集合で、かつ $i_1 < \cdots < i_p$ を意味するものとする。$\{ e_I \mid I \in S_p \}$ は $\wedge^p(V)$ の基底だから、任意の $x \in \wedge^p(V)$ は $x = \sum_{I \in S_p} x_I e_I$ $(x_I \in K)$ の形に一意に表すことができる。$e' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ を別の枠とすると、e'_I と e_I のあいだには

$$e'_J = \sum_{I \in S_p} a_{IJ}\, e_I \quad (J \in S_p) \tag{2}$$

の関係がある。ここで

$$a_{IJ} = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_p j_1} & \cdots & a_{i_p j_p} \end{vmatrix}, \quad I = (i_1, \cdots, i_p),\ J = (j_1, \cdots, j_p)$$

したがって $x = \sum_{I \in S_p} x'_I e'_I$ とするならば、 x_I と x'_I の間の関係は

$$x_I = \sum_{J \in S_p} a_{IJ}\, x'_J \quad (I \in S_p) \tag{3}$$

で与えられる。

$m = \dim W < \infty$ とし、線形写像 $f : V \to W$ が引き起こす写像 $\wedge f : \wedge^p(V) \to \wedge^p(W)$ を V の枠 $e = (e_i)$ と W の枠 $\bar{e} = (\bar{e}_i)$ に関して行列で表示することを考える。

$$f(e_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \bar{e}_i \quad (j = 1, \cdots, n)$$

ならば、(2) と同様に

$$(\wedge f)(e_J) = \sum_{I \in S_p^m} a_{IJ}\, \bar{e}_I \quad (J \in S_p^n) \tag{4}$$

が成り立つ。

練習問題 5.2. (2), (3), (4) を確かめよ。

例 5.1. $\dim V = 3$ の場合、$\{ e_1, e_2, e_3 \}$ を V の任意の基底として $\{ e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_2 \wedge e_3 \}$ が $\wedge^2(V)$ の基底になる。しかしこの場合、$e_1 \wedge e_3$ の代わりに $e_3 \wedge e_1 (= -e_1 \wedge e_3)$ を用いたものを基底にとることも自然である。例えば $x \in \wedge^2(V)$ の成分表示を

$$x = x_1\,(e_2 \wedge e_3) + x_2\,(e_3 \wedge e_1) + x_3\,(e_1 \wedge e_2) \quad (x_i \in K)$$

と書いた場合、添字が巡回順になって見やすい。

5.2　交代テンソル

■交代化　$\mathrm{T}(V)$ の次数付き部分空間に新たな乗法を定義して、次数付き代数 $\wedge(V)$ に同型な代数をつくることができる。このことを示すための準備として、まず線形作用素 $A : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$ を、

$$A(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p)} \quad (x_i \in V)$$

により定義する。ただし

$$A(1) = 1$$

とする。$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して線形作用素 $\rho_\sigma : \mathrm{T}^p(V) \to \mathrm{T}^p(V)$ を $\rho_\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(p)}$ により定義すれば、$p > 0$ と $x \in \mathrm{T}^p(V)$ に対しては

$$A(x) = \textstyle\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\rho_\sigma(x)$$

と言い換えられる。

A を $\mathrm{T}(V)$ の**交代化 (alternator)** と呼ぶ。

定義から明らかに、$\mathrm{T}(V)$ の交代化 A は $\mathrm{T}(V)$ の $\mathrm{T}(V)$ の中への 0 次線形写像である：$A \in \mathrm{L}_0(\,\mathrm{T}(V)\,)$。

練習問題 5.3. 任意の $x_i \in V$ に対して

$$\begin{aligned} &A(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \\ &= \textstyle\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \mathrm{sgn}\,(i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q)\, A(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p}) \otimes A(x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_q}) \end{aligned} \tag{5}$$

が成り立つことを示せ。式の意味は補題 5.8 を参照。

■交代テンソル　$\mathrm{T}(V)$ の交代化 A による $\mathrm{T}(V), \mathrm{T}^p(V)$ の像をそれぞれ $\mathrm{A}(V), \mathrm{A}^p(V)$ と書くと、

$$\mathrm{A}(V) = \oplus_p \mathrm{A}^p(V).$$

$\mathrm{A}(V)$ に属する元を**交代テンソル**と呼ぶ。とくに $\mathrm{A}^p(V)$ に属する元を p 階の交代テンソルと呼ぶ。

これに関連して反対称テンソルという概念がある：$\mathrm{T}^p(V)$ の元 x はすべての置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して $\rho_\sigma x = \mathrm{sgn}\,(\sigma)x$ を満たすとき、p 階の**反対称テンソル**と呼ばれる。本書では交代テンソルと反対称テンソルを一応、別の意味に用いる。しかし、

命題 5.11. 交代テンソルは反対称テンソルである。K の標数 $\neq 2$ ならば、反対称テンソルは交代テンソルである。

証明 交代テンソル $A(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\rho_\sigma(x)$ に ρ_τ を作用させると、$\rho_\tau A(x) = \mathrm{sgn}\,(\tau) \sum_\sigma \mathrm{sgn}\,(\tau\sigma)\rho_{\tau\sigma}(x) = \mathrm{sgn}\,(\tau)A(x)$ となる。ゆえに $A(x)$ は反対称テンソルである。

逆に K の標数を $\neq 2$ とし、x を反対称テンソルとする。x を $x = \sum_{i_1 \cdots i_p} \xi_{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$ のように表しておく。ここで $e_1, \cdots, e_n$ は一次独立とし、$i_1, \cdots, i_p$ は集合 $\{\,1, \cdots, n\,\}$ を独立にうごく。

$\sigma \in \mathfrak{S}_p$ に対して $\rho_\sigma x = \sum_{i_1 \cdots i_p} \xi_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$ となる。ここから $\xi_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}} = \mathrm{sgn}\,(\sigma)\xi_{i_1 \cdots i_p}$ が導かれる。

ここで K の標数は $\neq 2$ だから、$i_1 \cdots i_p$ のなかに同じものがあれば $\xi_{i_1 \cdots i_p} = 0$ となることに注意する。

すると x は次のように表される：$x = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\xi_{i_1 \cdots i_p} e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(p)}}$. これを整理すると、$x = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \xi_{i_1 \cdots i_p} A(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = A\left(\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \xi_{i_1 \cdots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p} \right)$ となって、x は交代テンソルである。 □

補題 5.12. 任意の $x \in V$ に対して

$$A(\cdots x \otimes \cdot \cdot \otimes x \cdots) = 0$$

が成り立つ。すなわち純テンソル $y = u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$ がある $i, j (i < j)$ の組に対して $u_i = u_j$ となっているならば、$Ay = 0$ である。

証明 純テンソル $y = u_1 \otimes \cdots \otimes u_p$ がある $i, j(i < j)$ の組に対して $u_i = u_j$ となっているものとする。互換 $\tau = (i, j) \in \mathfrak{S}_p$ を考えると、容易に分かるように $Ay = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p^+} \rho_\sigma(y - \rho_\tau y) = 0$ となる。ここで $\mathfrak{S}_p^+ (\subset \mathfrak{S}_p)$ は偶置換の全体である。 □

命題 5.13. $\operatorname{Ker} A = \mathfrak{I}(= \operatorname{Ker} \pi)$ が成り立つ。

証明 $\operatorname{Ker} A$, $\mathfrak{I}$ は次数付きイデアルだから $\operatorname{Ker} A = \mathfrak{I}(= \operatorname{Ker} \pi)$ は $(\operatorname{Ker} A) \cap \mathrm{T}^p(V) = \mathfrak{I}^p$ に同値である。先に $\mathfrak{I}^p \subset (\operatorname{Ker} A) \cap \mathrm{T}^p(V)$ を示す。$\mathfrak{I}^p$ の任意の元は純テンソル

$$y = u_1 \otimes \cdots \otimes u_{i-1} \otimes x \otimes x \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p-i-1} \quad (x, u_i, v_i \in V)$$

の和であり、補題 5.12 によりこのような純テンソル y に対して $Ay = 0$ であるから、$\mathfrak{I}^p \subset \operatorname{Ker} A \cap \mathrm{T}^p(V)$ である。

次に $\operatorname{Ker} A \cap \mathrm{T}^p(V) \subset \mathfrak{I}^p$ を示そう。

任意の $y \in \mathrm{T}^p(V)$ は純テンソル $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p, y_1 \otimes \cdots \otimes y_p$, etc の和である。$x_i, y_i, \ldots$ の生成する V の部分空間の基底を $\{ e_1, \ldots, e_n \}$ とすると $y = \sum_{i_1,\ldots,i_p} a_{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$ のかたちに表すことができる。ここで $i_1, \ldots, i_p$ は集合 $\{ 1 \ldots n \}$ を独立にうごく。$Ay = \sum_{i_1,\ldots,i_p} a_{i_1 \ldots i_p} A(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})$ となる。ところが $i_1 \ldots i_p$ のなかに同じものがあると、補題 5.12 により $A(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}) = 0$ となるから、$Ay = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} a_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}} A(e_{i_{\sigma(1)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(p)}}) = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a'_{i_1 \ldots i_p} A(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})$ である。ここで $a'_{i_1 \ldots i_p} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{i_{\sigma(1)} \ldots i_{\sigma(p)}}$ とおいた。一方、$\pi_p y$ も同様に $\pi_p y = \sum_{i_1,\ldots,i_p} a_{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p} = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a'_{i_1 \ldots i_p} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ と表すことができる。したがって $Ay = 0$ ならば、$A(e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p})$ たちは一次独立であるから (次の練習問題を研究せよ)、$a'_{i_1 \ldots i_p} = 0$、$\pi_p y = 0$ が導かれる。 □

練習問題 5.4. 一次独立な V のベクトル $e_1, \cdots, e_n$ と $I \subset \{ 1 \cdots n \}$ に対して $e_I^{\otimes} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_p}$ と略記しよう。ここで $i_1, \cdots, i_p$ は I の元を昇順にならべたものである。$\mathrm{A}(V)$ の元の集合 $\{ A(e_I^{\otimes}) \mid I \subset \{ 1 \cdots n \} \}$ が一次独立であることを示せ。

系 5.14. $A = \theta \circ \pi$ を満たす線形写像 $\theta : \wedge(V) \to \mathrm{A}(V)$ が唯一つ存在する。θ は次数を保つ線形同型である。

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{T}^p(V) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "A"] & \\ \wedge^p(V) \arrow[rr, shift left, "\theta"] & & \mathrm{A}^p(V) \arrow[ll, shift left, "\theta^{-1}"] \end{tikzcd}$$

■交代テンソル代数　系 5.14 で与えた写像 $\theta : \wedge(V) \to \mathrm{A}(V)$ は線形同型なのだから、θ が代数同型となるように、$A(V)$ の乗法を定義することができる。この乗法をもつ次数付き代数 $A(V)$ を V の**交代テンソル代数**と呼ぶ。$\theta : \wedge(V) \to \mathrm{A}(V)$ は次数付き代数の同型である。

交代テンソル代数 $\mathrm{A}(V)$ において二元 $A(x), A(y)$ の積を $A(x) \wedge A(y)$ と書くことにする。$A(x) \cdot A(y)$ と書いたのではテンソル代数の中での積と混同されるからである。

$\pi(x) \wedge \pi(y) = \pi(x \otimes y)$ の両辺に θ を作用させると、

$$A(x) \wedge A(y) = A(x \otimes y)$$

を得る。すなわち $A : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{A}(V)$ は次数付き代数の準同型である。

練習問題 5.3 の式 (5) から明らかに

$$\begin{aligned} & A(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \wedge A(x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \\ & = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \operatorname{sgn}(i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q) A(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p}) \otimes A(x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_q}) \end{aligned}$$

が成り立つ。

5.3　交代形式の代数

■交代形式　$\wedge(V) = \oplus_p \wedge^p(V)$ の次数付き双対空間 $\wedge(V)^{(*)} = \oplus_p \wedge^p(V)^*$ が幾何学では重要である。$\wedge(V)^{(*)}$ に属する元を V 上の**交代形式 (alternating form)** といい、とくに $(\wedge^p(V))^*$ に属する元を V 上の p 次交代形式、略して **p-形式 (p-form)** と呼ぶ。一般に

$$L(\wedge^p(V), W) \simeq A(V^p; W), \quad L(T^p(V), W) \simeq L(V^p; W),$$
$$A(V^p; W) \subset L(V^p; W).$$

だから

$$L(\wedge^p(V), W) \subset L(T^p(V), W)$$

と見なすことができる。例えば

$$(\wedge^p(V))^* \subset (T^p(V))^*, \quad \wedge(V)^{(*)} \subset T(V)^{(*)}$$

と見なすことができる。

ここで包含関係 $\wedge(V)^{(*)} \subset T(V)^{(*)}$ を別の言葉を用いて説明してみよう。

自然な全射 $\pi : T(V) \to \wedge(V)$ を考える。π の次数付き双対を ι とおく：

$$\iota : \wedge(V)^{(*)} \to T(V)^{(*)}$$

π が次数を保つ全射だから、それの次数付き双対であるところの ι は次数を保つ単射である。今、$\omega \in \wedge^p(V)^*$ とすると、$\iota(\omega) \in T^p(V)^*$ である。任意の $x_i \in V$ に対して $\langle \iota(\omega), x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \rangle = \langle \omega, \pi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \rangle = \langle \omega, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \rangle$ が成り立つから、$\omega \in A(V^p; K)$, $\iota(\omega) \in L(V^p; K)$ と見なすと、$(\iota(\omega))(x_1, \cdots, x_p) = \omega(x_1, \cdots, x_p)$. すなわち、$\iota(\omega) = \omega$ である。

つまり $\wedge(V)^{(*)} \subset T(V)^{(*)}$ は π の次数付き双対 ι による包含関係に他ならない。

■共変テンソルの交代化　共変テンソル代数 $T(V)^{(*)}$ の**交代化** A を $T(V)$ の交代化 A の次数付き双対として定義する。すなわち、$f \in T(V)^{(*)}$ と $x \in T(V)$ に対して

$$\langle Af, x \rangle = \langle f, Ax \rangle.$$

とする。

$T(V)$ の交代化が 0 次だからその次数付き双対であるところの A はやはり 0 次の斉次線形写像である。

$T(V)^{(*)}$ に限らず、一般に $L(T^p(V), W)$ の交代化 A を次の式で定義する：

$$A(f) = f \circ A \quad (f \in L(T^p(V), W)).$$

ここで右辺の A は $T^p(V)$ の交代化である。

命題 5.15. 任意の $f \in L(T^p(V), W)$ に対し、$Af \in L(\wedge^p(V), W)$ が常に成り立つ。反対に任意の $g \in L(\wedge^p(V), W)$ に対し $g = Af$ となる $f \in L(T^p(V), W)$ がある。つまり A は $L(T^p(V), W)$ の $L(\wedge^p(V), W)$ の上への線形写像である。

証明 Af が交代形式であることを見ればよい。

$$\begin{aligned}&(Af)(\cdots,x,x,\cdots) = (Af)(\cdots x\otimes x\cdots)\\&= f(A(\cdots x\otimes x\cdots)) = f(0) = 0.\end{aligned}$$

ゆえに $Af \in \mathrm{A}(V^p;W) \simeq \mathrm{L}(\wedge^p(V),W)$.
反対に任意の $g \in \mathrm{L}(\wedge^p(V),W)$ に対し、$g' = g\circ\theta^{-1}$ とおく。ここで $\theta : \wedge(V) \to \mathrm{A}(V)$ は補題 5.14 で与えたカノニカル同型である。すると $g' \in \mathrm{L}(\mathrm{A}^p(V),W)$ で、$\mathrm{A}^p(V)$ は $\mathrm{T}^p(V)$ の部分空間だから、g' の延長であるところの $f \in \mathrm{L}(\mathrm{T}^p(V),W)$ が存在する ($\mathrm{A}^p(V)$ の補空間を一つとり、補空間上で $f = 0$ とすればよい)。

$$\begin{aligned}&g(x_1,\cdots,x_p) = g(x_1\wedge\cdots\wedge x_p) = g(\pi(x_1\otimes\cdots\otimes x_p)) = g'(A(x_1\otimes\cdots\otimes x_p))\\&= f(A(x_1\otimes\cdots\otimes x_p)) = (Af)(x_1\otimes\cdots\otimes x_p) = (Af)(x_1,\cdots,x_p)\end{aligned}$$

だから、たしかに $g = Af$ となっている。 □

系 5.16. $\wedge(V)^{(*)} \subset \mathrm{T}(V)^{(*)}$ と考えるとき、$\mathrm{T}(V)^{(*)}$ の交代化 A は $\mathrm{T}(V)^{(*)}$ から $\wedge(V)^{(*)}$ の上への写像である。

$\mathrm{T}(V)^{(*)}$ の交代化 A が $\wedge(V)^{(*)}$ の上への写像であるということを、別の仕方で説明してみよう。
下の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{T}(V) & \xrightarrow{A} & \mathrm{T}(V)\\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle\gamma}\\ \wedge(V) & \xrightarrow[\theta]{} & \mathrm{A}(V)\end{array}$$

ここで γ は次数付き部分空間 $\mathrm{A}(V)$ から $\mathrm{T}(V)$ への自然な単射である。
図式に現れる対象の次数付き双対をとることで下の図式が出来上がる。

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{T}(V)^{(*)} & \xleftarrow{A=A^{(*)}} & \mathrm{T}(V)^{(*)}\\ {\scriptstyle\iota}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle\gamma^{(*)}}\\ \wedge(V)^{(*)} & \xleftarrow[\theta^{(*)}]{} & \mathrm{A}(V)^{(*)}\end{array}$$

この図式から $\mathrm{T}(V)^{(*)}$ の交代化 A が $\mathrm{T}(V)^{(*)}$ を $\wedge(V)^{(*)}$ の上に写すことは明らかであろう。実際、任意の $\omega \in \wedge(V)^{(*)}$ に対して、$\theta^{(*)}$ は双射、$\gamma^{(*)}$ は全射だから $\iota = \theta^{(*)}\circ\gamma^{(*)}(f)$ なる $f \in \mathrm{T}(V)^{(*)}$ が存在する。すなわち、$\iota(\omega) = A(f)$ となって、A は $\iota(\wedge(V)^{(*)})$ の上への写像である。

命題 5.17. $\varphi : \mathrm{T}(V^*) \to \mathrm{T}(V)^{(*)}$ を自然な単射とし、$\mathrm{T}(V^*), \mathrm{T}(V)^{(*)}$ の交代化を同じ文字 A で表す。このとき

$$A\circ\varphi = \varphi\circ A$$

が成り立つ。ここで左辺の A は $\mathrm{T}(V)^{(*)}$ の交代化、右辺の A は $\mathrm{T}(V^*)$ の交代化である。
とくに φ は $\mathrm{A}(V^*)$ を $\wedge(V)^{(*)}$ の中に写す：$\varphi(\mathrm{A}(V^*)) \subset \wedge(V)^{(*)}$。$\dim V < \infty$ ならば $\wedge(V)^{(*)}$ の上に写す。

証明 これは φ を $\mathrm{T}(V^*)\times\mathrm{T}(V)$ 上の 0 次双一次形式と考えると分かりやすい。任意の $\xi \in \mathrm{T}(V^*)$ と $x \in \mathrm{T}(V)$ に対して

$$\varphi(\xi, Ax) = \varphi(A\xi, x) \tag{6}$$

が成り立つことをまず見よう。$\xi = \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p$, $x = x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$, $\xi_i \in V^*$, $x_i \in V$, $p > 0$ のケースを考えれば十分である。左辺は $\varphi(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p, A(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)) = \sum_\sigma \mathrm{sgn}\,(\sigma) \langle\, \xi_1\,,\, x_{\sigma(1)} \,\rangle \cdots \langle\, \xi_p\,,\, x_{\sigma(p)} \,\rangle$ に、右辺は $\varphi(A(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p), x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \sum_\sigma \mathrm{sgn}\,(\sigma) \langle\, \xi_{\sigma(1)}\,,\, x_1 \,\rangle \cdots \langle\, \xi_{\sigma(p)}\,,\, x_p \,\rangle$ に等しい。どちらも同じ行列式

$$\begin{vmatrix} \langle\, \xi_1\,,\, x_1 \,\rangle & \langle\, \xi_1\,,\, x_2 \,\rangle & \cdots \\ \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

の値で、ゆえに左辺と右辺は相等しいことが分かる。

さて $\varphi(\xi, Ax) = \langle\, \varphi\xi\,,\, Ax \,\rangle = \langle\, A(\varphi\xi)\,,\, x \,\rangle$. 一方、$\varphi(A\xi, x) = \langle\, \varphi(A\xi)\,,\, x \,\rangle$ だから $\langle\, A(\varphi\xi)\,,\, x \,\rangle = \langle\, \varphi(A\xi)\,,\, x \,\rangle$ が導かれる。これが任意の ξ, x で成り立つから $A \circ \varphi = \varphi \circ A$ である。

任意の $x \in \mathrm{T}(V^*)$ に対して $\varphi(Ax) = A(\varphi x)$ だから $\varphi(\mathrm{A}(V^*)) \subset \wedge(V)^{(*)}$ である。$\dim V < \infty$ の場合には φ は双射だから $\varphi(\mathrm{A}(V^*)) = \wedge(V)^{(*)}$ である。 □

■交代形式の代数　$\omega \in \wedge^p(V)^*$ と $\theta \in \wedge^q(V)^*$ の外積 $\omega \wedge' \theta \in \wedge^{p+q}(V)^*$ を

$$\omega \wedge' \theta = A(f \otimes g) \quad (\omega = Af, \theta = Ag)$$

により定義する。積が well-defined であることは次の補題から分かる。

補題 5.18. $N = \{\, f \in \mathrm{T}(V)^{(*)} \,\big|\, Af = 0 \,\}$ とおく。N は $\mathrm{T}(V)^{(*)}$ の両側イデアルである。

証明 N は $\mathrm{T}(V)^{(*)}$ の部分空間である。さらに共変テンソル代数の交代化 A の定義と練習問題 5.3 の式 (5) により

$$\begin{aligned}
&\langle\, A(f \otimes g)\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q} \,\rangle = \langle\, f \otimes g\,,\, A(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \,\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \mathrm{sgn}\,(i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q)\, \langle\, f\,,\, A(x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p}) \,\rangle \cdot \langle\, g\,,\, A(x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_q}) \,\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \mathrm{sgn}\,(i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q)\, \langle\, Af\,,\, x_{i_1} \otimes \cdots \otimes x_{i_p} \,\rangle \cdot \langle\, Ag\,,\, x_{j_1} \otimes \cdots \otimes x_{j_q} \,\rangle.
\end{aligned}$$

ここから $Af = 0$ または $Ag = 0$ ならば $A(f \otimes g) = 0$ となることは明らかである。ゆえに N は $\mathrm{T}(V)^{(*)}$ における両側イデアルである。 □

この補題により $\omega = Af = Af'$, $\theta = Ag = Ag'$ ならば $A(f \otimes g) - A(f' \otimes g') = A((f - f') \otimes g) + A(f' \otimes (g - g')) = 0$ となって、$A(f \otimes g) = A(f' \otimes g')$。すなわち $\omega \wedge' \theta$ は well-defined である。補題の証明から次の式も明らかである：

$$\begin{aligned}
&\langle\, \omega \wedge' \theta,\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p+q} \,\rangle \\
&= \textstyle\sum_{i_1 < \cdots < i_p} \mathrm{sgn}\,(i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q)\, \langle\, \omega,\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \,\rangle \cdot \langle\, \theta,\, x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_q} \,\rangle.
\end{aligned} \tag{7}$$

$\omega \wedge' \theta$ を式 (7) を用いて定義することもできる。実際、右辺は $x_1, \cdots, x_{p+q}$ の交代形式だから左辺は well-defined である (補題 5.8 を参照)。

この乗法により、$\wedge(V)^{(*)}$ は次数付き代数になり、$A : \mathrm{T}(V)^{(*)} \to \wedge(V)^{(*)}$ は次数付き代数の準同型となる。$\wedge(V)^{(*)}$ は単位的結合的代数である。

任意の $\xi_i \in V^*(\subset \wedge(V)^{(*)})$ に対して、

$$(\xi_1 \wedge' \cdots \wedge' \xi_p)(x_1, \cdots, x_p) = \langle\, \xi_1 \wedge' \cdots \wedge' \xi_p\,,\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \,\rangle = \det(\langle\, \xi_i\,,\, x_j \,\rangle)$$

が成り立つ。実際、$\xi_1 \wedge' \cdots \wedge' \xi_p = A(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p)$ だから、

$$
\begin{aligned}
&(\xi_1 \wedge' \cdots \wedge' \xi_p)(x_1, \cdots, x_p) = (\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p)(A(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_p} \mathrm{sgn}\,(\sigma) \langle \xi_1 \,,\, x_{\sigma(1)} \rangle \cdots \langle \xi_p \,,\, x_{\sigma(p)} \rangle = \det(\langle \xi_i \,,\, x_j \rangle).
\end{aligned}
$$

命題 5.19. $\omega \in \wedge^p(V)^*, \theta \in \wedge^q(V)^*$ ならば

$$
\omega \wedge' \theta = (-1)^{pq}\, \theta \wedge' \omega
$$

が成り立つ。

p が偶数ならば $\omega \in \wedge^p(V)^*$ は $\wedge(V)^{(*)}$ のすべての元と可換である (中心にある)。

p が奇数ならば、$\omega \in \wedge^p(V)^*$ は

$$
\omega \wedge' \omega = 0
$$

を満たす。

証明 ここでは $\omega \in \mathrm{A}(\,V^p\,;\,K\,), \theta \in \mathrm{A}(\,V^q\,;\,K\,)$ と考える。

$$
\begin{aligned}
(\omega \wedge' \theta)(x_N) &= \textstyle\sum_{(I,J)} \mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} N \\ I,J \end{smallmatrix}\right)\omega(x_I) \cdot \theta(x_J) \\
&= (-1)^{pq} \textstyle\sum_{(J,I)} \mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} N \\ J,I \end{smallmatrix}\right)\theta(x_J) \cdot \omega(x_I) = (-1)^{pq}(\theta \wedge' \omega)(x_N)
\end{aligned}
$$

ゆえに第一の式が成り立つ。p が偶数ならば $(-1)^{pq} = 1$ だから任意の θ に対して $\omega \wedge' \theta = \theta \wedge' \omega$ である。
次に $\omega \in \mathrm{A}(\,V^p\,;\,K\,)$ に対して $\omega \wedge' \omega$ を考える。S を $N = \{\,1 \cdots 2p\,\}$ の p 元から成る部分集合 I 全体の集合とし、$S_1 = \{I \in S \mid 1 \in I\}, S_2 = \{I \in S \mid 1 \notin I\}$ とすると、S は S_1 と S_2 の互いに素な和で、対応 $I \in S_1 \mapsto J \in S_2$ (J は I の補集合) は双射である。p が奇数ならば $\mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} N \\ J,I \end{smallmatrix}\right) = (-1)^{p \cdot p}\mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} N \\ I,J \end{smallmatrix}\right) = -\mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} N \\ I,J \end{smallmatrix}\right)$ だから

$$
\begin{aligned}
&(\omega \wedge' \omega)(x_N) = \textstyle\sum_{I \in S_1} \mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} N \\ I,J \end{smallmatrix}\right)\omega(x_I) \cdot \omega(x_J) + \mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} N \\ J,I \end{smallmatrix}\right)\omega(x_J) \cdot \omega(x_I) \\
&= \textstyle\sum_{I \in S_1} \Big(\, \mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} N \\ I,J \end{smallmatrix}\right) + \mathrm{sgn}\left(\begin{smallmatrix} N \\ J,I \end{smallmatrix}\right) \Big)\omega(x_I) \cdot \omega(x_J) = 0.
\end{aligned}
$$

ゆえに $\omega \wedge' \omega = 0$ である。 □

■$\wedge(V^*)$ から $\wedge(V)^{(*)}$ への自然な単射　$\varphi : \mathrm{T}(V^*) \to \mathrm{T}(V)^{(*)}$ を自然な単射とする。φ の $\mathrm{A}(V^*)$ への制限を ψ' と書くと、命題 5.17 で示したように ψ' は $\mathrm{A}(V^*)$ の $\wedge(V)^{(*)}$ の中への単射で ($\dim V < \infty$ ならば双射である)、$A \circ \varphi = \psi' \circ A$ が成り立つ。よって $\psi'(A\xi \wedge A\eta) = \psi'(A(\xi \otimes \eta)) = A(\varphi(\xi \otimes \eta)) = A(\xi \otimes \eta) = A\xi \wedge' A\eta$ となり、$\psi' : \mathrm{A}(V^*) \to \wedge(V)^{(*)}$ は次数付き代数の単位的準同型である。

$\theta : \wedge(V^*) \to \mathrm{A}(V^*)$ を系 5.14 で与えたカノニカルな同型とし、$\psi = \psi' \circ \theta$ とおくと、次数付き代数の単位的準同型 $\psi : \wedge(V^*) \to \wedge(V)^{(*)}$ が得られる。定義から明らかに任意の $\xi \in V^*$ に対して $\psi(\xi) = \xi$。したがって ψ は準同型だから任意の $\xi_i \in V^*$ に対して $\psi(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p) = \xi_1 \wedge' \cdots \wedge' \xi_p$ が成り立つ。

ψ を $\wedge(V^*)$ から $\wedge(V)^{(*)}$ の中への自然な単位的準同型と呼ぶ。ψ は単射である。$\dim V < \infty$ の場合には ψ は双射となるから、自然な同型と呼ぶ。

ゆえに $\xi \in \wedge(V^*)$ と $\psi(\xi) \in \wedge(V)^{(*)}$ を同一視して、$\wedge(V^*) \subset \wedge(V)^{(*)}$ と見なすことが可能である。そうすると、$\xi_i \in V^*$ に対して、$\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p$ と $\xi_1 \wedge' \cdots \wedge' \xi_p$ を区別する必要がなくなるから、ω と θ の外積 $\omega \wedge' \theta$ を $\omega \wedge \theta$ と書いてしまっても問題はない。そこで以下では、混同のおそれがなければ、$\omega \wedge' \theta$ を $\omega \wedge \theta$ と書くことにする。

たとえば $\omega \in \wedge^p(V)^*, \theta \in \wedge^q(V)^*, x_i \in V$ に対して、

$$\begin{aligned}&\langle\, \omega \wedge \theta\,,\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p+q} \,\rangle \\ &= \textstyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} \operatorname{sgn}(i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q)\, \langle\, \omega\,,\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \,\rangle \cdot \langle\, \theta\,,\, x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_q} \,\rangle\,.\end{aligned} \tag{8}$$

なお、$\dim V = \infty$ ならば、 ψ は全射でないことに注意する。すなわち、$\wedge(V^*)$ は $\wedge(V)^{(*)}$ の真部分集合である (下の例を参照)。

例 5.2. 任意の $f = \xi_1 \wedge \eta_1 + \cdots + \xi_n \wedge \eta_n \in \wedge^2(V^*) \subset \mathrm{A}(\,V^2\,;\,K\,)$ は、$f : V \to V^*$ と考えるならば、$f(x) = \sum_{i=1}^n (\langle\, \xi_i\,,\, x \,\rangle \eta_i - \langle\, \eta_i\,,\, x \,\rangle \xi_i)$ だから、$\mathrm{Img}\, f$ は $\xi_i, \eta_i\ (i = 1, \cdots, n)$ で張られ、$\mathrm{rank} f < \infty$ である。

ところが例えば、V が $\{\, e_i \,\}_{i\in\mathbb{Z}}$ を基底にもつと仮定して、$f \in \mathrm{L}(\,V^2\,;\,K\,)$ を $f(e_i, e_{i+1}) = 1,\ f(e_i, e_{i-1}) = -1,\ f(e_i, e_j) = 0\ (j \neq i+1, i-1)$ で定義すると、$f \in \mathrm{A}(\,V^2\,;\,K\,)$。$f$ を $f : V \to V^*$ と考えると、$f(e_i) = e_{i+1}^* - e_{i-1}^*$ である。ここで e_i^* は $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ で定義される V^* の元。$\{\, e_{i+1}^* - e_{i-1}^* \,\}_{i\in\mathbb{Z}}$ は一次独立だから、$\mathrm{rank} f = \infty$ である。ゆえにこの f は $\wedge^2(V^*)$ には属しない。つまり $\wedge^2(V^*) \subsetneq \mathrm{A}(\,V^2\,;\,K\,)$。

ψ はもちろん $\wedge(V^*) \times \wedge(V)$ 上の 0 次の斉次双一次形式と見ることもできる。そう見なすと、

$$\begin{aligned}&\psi(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \langle\, \psi(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p)\,,\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \,\rangle \\ &= \langle\, \xi_1 \wedge' \cdots \wedge' \xi_p\,,\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \,\rangle = \det\Big(\, \langle\, \xi_i\,,\, x_j \,\rangle \,\Big)_{i,j}\end{aligned}$$

である。

命題 5.20. $\wedge(V^*) \times \wedge(V)$ 上の斉次双一次形式 ψ は非退化である。

証明 V を V^* に置き換えると、カノニカルな単射 $\psi' : \wedge(V^{**}) \to \wedge(V^*)^{(*)}$ が存在することになる。ψ' の $\wedge(V)$ への制限 ψ'' は単射である。ところが

$$\psi''(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p, \xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_p) = \det\Big(\, \langle\, x_i\,,\, \xi_j \,\rangle \,\Big)_{i,j}$$

となるから $\psi'' = {}^t\psi$。ゆえに ψ も ${}^t\psi$ も単射で、ψ は非退化である。 □

■**引き戻し** $\lambda : V \to W$ を線形写像とする。ここでは λ が引き起こす準同型 $\wedge\lambda : \wedge(V) \to \wedge(W)$ を λ と略記し、$\wedge\lambda$ の次数付き双対 $(\wedge\lambda)^{(*)} : \wedge(W)^{(*)} \to \wedge(V)^{(*)}$ を λ^* と略記する。すると

$$\langle\, \lambda^*\omega\,,\, x \,\rangle = \langle\, \omega\,,\, \lambda x \,\rangle \quad (\omega \in \wedge(W)^{(*)},\ x \in \wedge(V)).$$

λ^* は λ による**引き戻し (pull-back)** と呼ばれる。

定義から明らかに、任意の $\omega \in (\wedge^p(V))^*,\ x_i \in V$ に対して

$$\langle\, \lambda^*\omega\,,\, x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \,\rangle = \langle\, \omega\,,\, \lambda x_1 \wedge \cdots \wedge \lambda x_p \,\rangle$$

あるいは

$$(\lambda^*\omega)(x_1, \cdots, x_p) = \omega(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_p)$$

が成り立つ。

命題 5.21. $\lambda : V \to W$ を線形写像、$\psi : \wedge(V^*) \to \wedge(V)^{(*)},\ \psi' : \wedge(W^*) \to \wedge(W)^{(*)}$ を自然な単位的準同型とする。このとき、

$$\psi \circ \lambda^* = \lambda^* \circ \psi'$$

が成り立つ。ここで左辺の λ^* は $\lambda^* : W^* \to V^*$ の引き起こす準同型 $\wedge(\lambda^*) : \wedge(W^*) \to \wedge(V^*)$ を意味し、右辺の λ^* は λ による引き戻し $(\wedge\lambda)^{(*)} : \wedge(W)^{(*)} \to \wedge(V)^{(*)}$ である。

$$
\begin{tikzcd}
\wedge(W^*) \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d, "\lambda^*"'] & \wedge(W)^{(*)} \arrow[d, "\lambda^*"] \\
\wedge(V^*) \arrow[r, "\psi"'] & \wedge(V)^{(*)}
\end{tikzcd}
$$

証明 任意の $\eta_i \in W^*, x_i \in V$ に対して、左辺は

$$
\begin{aligned}
&\langle \psi \circ \lambda^*(\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_p) , x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \rangle = \langle \psi(\lambda^*\eta_1 \wedge \cdots \wedge \lambda^*\eta_p) , x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \rangle \\
&= \langle \lambda^*\eta_1 \wedge' \cdots \wedge' \lambda^*\eta_p , x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \rangle = \det\Big(\langle \lambda^*\eta_i , x_j \rangle \Big) = \det\Big(\langle \eta_i , \lambda x_j \rangle \Big),
\end{aligned}
$$

一方、右辺は

$$
\begin{aligned}
&\langle \lambda^* \circ \psi'(\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_p) , x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \rangle = \langle \psi'(\eta_1 \wedge \cdots \wedge \eta_p) , \lambda x_1 \wedge \cdots \wedge \lambda x_p \rangle \\
&= \langle \eta_1 \wedge' \cdots \wedge' \eta_p , \lambda x_1 \wedge \cdots \wedge \lambda x_p \rangle = \det\Big(\langle \eta_i , \lambda x_j \rangle \Big).
\end{aligned}
$$

したがって、$\psi \circ \lambda^* = \lambda^* \circ \psi'$ である。 □

命題 5.22. $\lambda : V \to W$ による引き戻し $\lambda^* : \wedge(W)^{(*)} \to \wedge(V)^{(*)}$ は次数付き代数の単位的準同型である。

証明 任意の $\omega \in \wedge^p(W)^*, \theta \in \wedge^q(W)^*, x_i \in V$ に対して、

$$
\begin{aligned}
&\langle \lambda^*(\omega \wedge \theta) , x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p+q} \rangle = \langle \omega \wedge \theta , \lambda x_1 \wedge \cdots \wedge \lambda x_{p+q} \rangle \\
&= \sum_i \operatorname{sgn}(i, j) \langle \omega , \lambda x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \lambda x_{i_p} \rangle \cdot \langle \theta , \lambda x_{j_1} \wedge \cdots \wedge \lambda x_{j_q} \rangle \\
&= \sum_i \operatorname{sgn}(i, j) \langle \lambda^*\omega , x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \rangle \cdot \langle \lambda^*\theta , x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_q} \rangle \\
&= \langle \lambda^*\omega \wedge \lambda^*\theta , x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p+q} \rangle
\end{aligned}
$$

が成り立つから、$\wedge^{p+q}(V)$ 上で $\lambda^*(\omega \wedge \theta), \lambda^*\omega \wedge \lambda^*\theta$ は一致する。どちらも $p+q$ 次の斉次元だから $p+q$ 次以外の成分上では 0 である。すなわち $\lambda^*(\omega \wedge \theta) = \lambda^*\omega \wedge \lambda^*\theta$ である。ゆえに一般の $\omega, \theta \in \wedge(W)^{(*)}$ に対しても $\lambda^*(\omega \wedge \theta) = \lambda^*\omega \wedge \lambda^*\theta$ である。 □

■外積代数上の斉次双一次形式 $f : V \times W \to K$ を双一次形式とする。$f : V \to W^*$ と見なすと、f は次数付き代数の単位的準同型

$$
\wedge f : \wedge(V) \to \wedge(W^*) (\subset \wedge(W)^{(*)})
$$

を引き起こす。$\wedge f$ を $\wedge(V) \times \wedge(W)$ 上の 0 次双一次形式と見たとき、

$$
(\wedge f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p , y_1 \wedge \cdots \wedge y_p) = \det\Big(f(x_i, y_j) \Big)_{i,j}
$$

が成り立つ。実際、$x \in V$ に対して $x^* = f(x)$ と書くと、

$$
\begin{aligned}
&(\wedge f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p , y_1 \wedge \cdots \wedge y_p) = \langle (\wedge f)(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) , y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \rangle \\
&= \langle {x_1}^* \wedge \cdots \wedge {x_p}^* , y_1 \wedge \cdots \wedge y_p \rangle = \det\Big(\langle {x_i}^* , y_j \rangle \Big)_{i,j} \\
&= \det\Big(f(x_i, y_j) \Big)_{i,j} .
\end{aligned}
$$

同様に転置双一次形式 ${}^{\mathrm{t}}f : W\times V \to K$ は 0 次双一次形式 $\wedge({}^{\mathrm{t}}f) : \wedge(W) \to \wedge(V^*)(\subset \wedge(V)^{(*)})$ を引き起こす。

$$\begin{aligned}&(\wedge({}^{\mathrm{t}}f))\,(\,y_1\wedge\cdots\wedge y_p\,,\,x_1\wedge\cdots\wedge x_p\,)\\&=\det\Big(\,{}^{\mathrm{t}}f(y_i,x_j)\,\Big)_{i,j}=\det\Big(\,f(x_j,y_i)\,\Big)_{i,j}\\&=(\wedge f)\,(\,x_1\wedge\cdots\wedge x_p\,,\,y_1\wedge\cdots\wedge y_p\,)\end{aligned}$$

だから

$$\wedge({}^{\mathrm{t}}f)={}^{\mathrm{t}}(\wedge f)$$

が成り立つ。したがって、f が非退化ならば $\wedge f$ は非退化であり、f が対称ならば $\wedge f$ は対称である。実際、f が非退化ならば f, ${}^{\mathrm{t}}f$ は単射だから、それぞれが引き起こす $\wedge f$, $\wedge({}^{\mathrm{t}}f)={}^{\mathrm{t}}(\wedge f)$ も単射である。ゆえに $\wedge f$ は非退化である。f が対称ならば、$f={}^{\mathrm{t}}f$ だから $\wedge f=\wedge({}^{\mathrm{t}}f)={}^{\mathrm{t}}(\wedge f)$ である。

次に $\dim V=\dim W\leq\infty$ で f が非退化の場合を考える。この場合、$f : V\to W^*$ は双射だから逆写像 $f^{-1} : W^*\to V(\simeq V^{**})$ が定義される。f^{-1} は $W^*\times V^*$ 上の非退化双一次形式と見ることができる。$f^{-1}\circ f=\mathrm{id}$, $f\circ f^{-1}=\mathrm{id}$ だから $\wedge(f^{-1})\circ\wedge f=\mathrm{id}$, $\wedge f\circ\wedge(f^{-1})=\mathrm{id}$, すなわち

$$\wedge(f^{-1})=(\wedge f)^{-1}$$

である。

例 5.3. $K=\mathbb{R}$ の場合、V の計量 ($V\times V$ 上の非退化対称双一次形式) g は $\wedge(V)$ 上に計量 $\wedge g$ を引き起こす。

練習問題 5.5. (興味のある人だけ) 計量 g が正定値ならば、計量 $\wedge g$ も正定値である。

$\dim V=n<\infty$ とし、g の符号数を (s,t) とする。このとき、$\wedge g$ の符号数は $(2^n,0)$ ($t=0$ のとき)、$(2^{n-1},2^{n-1})$ ($t>0$ のとき) となる。

以上のことを証明せよ。

今後は、とくに混乱のおそれのない限り、双一次形式 $f : V\times W\to K$ が引き起こす斉次双一次形式 $\wedge f : \wedge(V)\times\wedge(W)\to K$ を同じ記号 f で表す。すなわち

$$f\,(\,x_1\wedge\cdots\wedge x_p\,,\,y_1\wedge\cdots\wedge y_p\,)=\det\Big(\,f(x_i,y_j)\,\Big)_{i,j}.$$

■内部積 (I)　$x\in\wedge(V)$ に対して $i_x={e_x}^{(*)}$ とおくと、

$$\langle\,i_x\omega\,,\,y\,\rangle=\langle\,\omega\,,\,e_xy\,\rangle=\langle\,\omega\,,\,x\wedge y\,\rangle\quad(x,y\in\wedge(V),\omega\in\wedge(V)^{(*)}).$$

次数付き代数の一般論で述べたように、$i_x\omega$ を x による ω の (右) 内部積と呼ぶ。$x\in\wedge(V)\mapsto i_x\in\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,\wedge(V)^{(*)}\,)$ は次数を逆にする単位的反準同型である。

$x\in V$, $x_i\in V$, $\omega\in(\wedge^p(V))^*$ ならば

$$\langle\,i_x\omega\,,\,x_2\wedge\cdots\wedge x_p\,\rangle=\langle\,\omega\,,\,x\wedge x_2\wedge\cdots\wedge x_p\,\rangle,$$

あるいは

$$(i_x\omega)(x_2,\cdots,x_p)=\omega(x,x_2,\cdots,x_p).$$

命題 5.23. $x \in V$ ならば、x による内部積 $i_x : \wedge(V)^{(*)} \to \wedge(V)^{(*)}$ は

$$i_x\theta = \langle \theta, x \rangle = \theta(x) \quad (\theta \in V^*)$$

を満たす唯一つの -1 次反微分である。

証明 定義から明らかに i_x は -1 次の斉次線形変換で、一次の元 $\theta \in V^*$ に対しては $i_x\theta = \langle \theta, x \rangle$ を満たす。
$\omega \in (\wedge^p(V))^*, \theta \in (\wedge^q(V))^*$ $x_i \in V$ とすると、

$$\begin{aligned}
&(i_x(\omega \wedge \theta))(x_2, \cdots, x_{p+q}) = (\omega \wedge \theta)(x, x_2, \cdots, x_{p+q}) \\
&= \textstyle\sum_{1<i_2<\cdots<i_p} \operatorname{sgn}(1\, i_2 \cdots i_p\, j_1 \cdots j_q)\, \omega(x, x_{i_2}, \cdots, x_{i_p}) \cdot \theta(x_{j_1}, \cdots, x_{j_q}) \\
&\quad + \textstyle\sum_{1<i_1<\cdots i_p} \operatorname{sgn}(i_1 \cdots i_p\, 1\, j_2 \cdots j_q)\, \omega(x_{i_1}, \cdots, x_{i_p}) \cdot \theta(x, x_{j_2}, \cdots, x_{j_q}).
\end{aligned} \tag{9}$$

容易に分かるように、(9) の右辺の第一の和は $((i_x\omega) \wedge \theta)(x_2, \cdots, x_{p+q})$ に等しく、第二の和は $(-1)^p(\omega \wedge i_x\theta)(x_2, \cdots, x_{p+q})$ に等しい。ゆえに (x_i は任意だから)

$$i_x(\omega \wedge \theta) = (i_x\omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (i_x\theta)$$

が成り立ち、i_x は -1 次の反微分である。
$D\theta = \langle \theta, x \rangle$ $(\theta \in V^*)$ を満たす -1 次反微分 D の一意性は次の問題の式から明らかであろう。 □

練習問題 5.6. 任意の $x \in V, \theta_i \in V^*$ に対して

$$i_x(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_p) = \textstyle\sum_{i=1}^p (-1)^{i-1} \langle \theta_i, x \rangle \theta_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\theta_i} \wedge \cdots \wedge \theta_p. \tag{10}$$

が成り立つことを、$i_x(\theta) = \langle \theta, x \rangle$ と i_x が -1 次反微分であることだけを用いて証明せよ (p に関する帰納法を使え)。

式 (10) からは次の系も明らかであろう。

系 5.24. 任意の $x \in \wedge(V)$ に対して、i_x は $\wedge(V^*)$ を不変にする。

次に $n = \dim V < \infty$ とし、$e = (e_1, \cdots, e_n)$ を V の枠 (順序基) とする。$e^* = (e_1{}^*, \cdots, e_n{}^*)$ を e に双対な V^* の枠とする。任意の $I, K \subset \{1, \cdots, n\}$ に対して

$$i_{e_I}(e_K{}^*) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\left(\begin{smallmatrix} K \\ I,\, K \setminus I \end{smallmatrix}\right) e_{K\setminus I}{}^* & (I \subset K) \\ 0 & (I \not\subset K) \end{cases} \tag{11}$$

が成り立つ。実際、I, K はそれぞれ p 元, q 元より成るとすると、$p > q$ ならば明らかに $I \not\subset K$, $i_{e_I}(e_K{}^*) = 0$ である。$p \leq q$ ならば J を $q-p$ 元から成る $\{1, \cdots, n\}$ の部分集合として $i_{e_I}(e_K{}^*) = \sum_J a_J e_J{}^*$ とおくと、$a_J = \langle i_{e_I}(e_K{}^*), e_J \rangle = \langle e_K{}^*, e_I \wedge e_J \rangle$. ここから容易にわかるように、$a_J$ は $I \cup J = K$ の場合に限って値をもち、その値は $a_J = \operatorname{sgn}\left(\begin{smallmatrix} K \\ I,J \end{smallmatrix}\right)$ に等しい。よって上の式を得る。

■ 内部積 (II) 次に $\omega \in \wedge^p(V)^*$ に対して、線形写像 $i_\omega : \wedge(V) \to \wedge(V)$ を

$$i_\omega(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p+q}) = \textstyle\sum_{i_1<\cdots<i_p} \operatorname{sgn}(i_1 \cdots i_p\, j_1 \cdots j_q)\, \omega(x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p})\, x_{j_1} \wedge \cdots \wedge x_{j_q}$$

により定義する。ここで $\{i_1 \cdots i_p\} \subset \{1 \cdots p+q\}$ で $\{j_1 \cdots j_q\}$ はその補集合である。右辺は $x_1, \cdots, x_{p+q}$ に関して交代的だから i_ω は well-defined である (補題 5.8 を参照)。ただし $r < p, x \in \wedge^r(V)$ ならば $i_\omega x = 0$ とする。また $p < 0$ ならば $i_\omega = 0$ とする。一般の $\omega \in \wedge(V)^{(*)}$ に対しては $i_\omega = \sum_p i_{\omega_p}$ とする。

命題 5.25. 任意の $\omega, \theta \in \wedge(V)^{(*)}$, $x \in \wedge(V)$ に対して

$$\langle\, \omega \wedge \theta \,,\, x \,\rangle = \langle\, \theta \,,\, i_\omega x \,\rangle \tag{12}$$

が成り立つ。すなわち $\wedge(V)$ において、任意の $\omega \in \wedge(V)^{(*)}$ に対して ω による内部積が定義できて、i_ω がその内部積である。

証明 実際, $\omega \in \wedge^p(V)^*, \theta \in \wedge^q(V)^*, x = x_1 \wedge \cdots \wedge x_{p+q}$ $(x_i \in V)$ ならば (12) の左辺は $\sum_{i_1<\cdots<i_p} \mathrm{sgn}\,(i_1 \cdots i_p j_1 \cdots j_q) \langle\, \omega \,,\, x_{i_1} \wedge \cdots \wedge x_{i_p} \,\rangle \cdot \langle\, \theta \,,\, x_{j_1}, \cdots, x_{j_q} \,\rangle$ に等しく、これは明らかに右辺に等しい。 □

次数付き代数の一般論で述べたように、$\omega \in \wedge(V)^{(*)} \mapsto i_\omega \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\wedge(V))$ は次数を逆にする単位的反準同型である。

命題 5.26. $\theta \in V^*$ ならば i_θ は

$$i_\theta x = \langle\, \theta \,,\, x \,\rangle = \theta(x) \quad (x \in V)$$

を満たす $\wedge(V)$ の唯一つの -1 次反微分である。

証明 i_θ の定義により、$p > 0$ ならば任意の $x_i \in V$ に対して

$$i_\theta(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \langle\, \theta \,,\, x_k \,\rangle\, x_1 \wedge \cdots \widehat{x_k} \cdots \wedge x_p$$

となる。ここから $x \in V$ に対して $i_\theta x = \langle\, \theta \,,\, x \,\rangle$ は明らかである。さらに

$$\begin{aligned}
&i_\theta(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge x_{p+1} \wedge \cdots \wedge x_{p+q}) \\
&= \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} \langle\, \theta \,,\, x_k \,\rangle\, x_1 \wedge \cdots \widehat{x_k} \cdots \wedge x_{p+q} \\
&\quad + \sum_{l=1}^q (-1)^{p+l-1} \langle\, \theta \,,\, x_{p+l} \,\rangle\, x_1 \wedge \cdots \widehat{x_{p+l}} \cdots \wedge x_{p+q} \\
&= i_\theta(x_1 \wedge \cdots \wedge x_p) \wedge x_{p+1} \wedge \cdots \wedge x_{p+q} \\
&\quad + (-1)^p x_1 \wedge \cdots \wedge x_p \wedge i_\theta(x_{p+1} \wedge \cdots \wedge x_{p+q}),
\end{aligned}$$

$$i_\theta(x \wedge y) = (i_\theta x) \wedge y + (-1)^p x \wedge (i_\theta y) \quad (x \in \wedge^p(V), y \in \wedge^q(V))$$

となって i_θ は -1 次の反微分である。一意性についての主張は前と同様に証明できる。 □

5.4 体積要素と ∗ 作用素

■体積要素と向き　ここでは $K = \mathbb{R}$ とし、考えている実ベクトル空間の次元は特に断りのないかぎり有限次元であると仮定する。

$n = \dim V$ とする。V 上の 0 でない n-形式 θ を V の**体積要素 (volume element)** と呼ぶ。$\wedge^n(V^*)$ は $\wedge(V^*)$ の 1 次元部分空間だから、任意の二つの体積要素 $\omega, \theta \in \wedge^n(V) \setminus \{0\}$ の間には、$\omega = a\theta$ $(a \neq 0)$ の関係がある。$a > 0$ のときに ω と θ は "同じ向きをもつ" といい、この同値関係による同値類を V の**向き (orientation)** と定義する。

V には二つの向きがある。向き o を付けたベクトル空間 $V = (V, o)$ は文字通り**向きづけられたベクトル空間**と呼ばれる。o を $V = (V, o)$ の**正の向き**と呼び、o でないほうの向きを $V = (V, o)$ の**負の向き**と呼ぶ。

向きづけられたベクトル空間 V において、正の向きに属する体積要素は、単に V の体積要素と呼ばれる。V の体積要素 ω に対して、V の枠 (順序基) $e = (e_i)$ は $\omega(e_1, \cdots, e_n) > 0$ となるときに**正の枠 (positive frame)** といい、$\omega(e_1, \cdots, e_n) < 0$ となるときに負の枠という。

V, W を向きづけられた n 次元ベクトル空間、$\lambda : V \to W$ を線形写像、$\lambda^* : \wedge(W^*) \to \wedge(V^*)$ を λ による引き戻しとする。W の体積要素 ω に対して、λ^* が V の体積要素となっているときに、λ は**向きを保つ**という。言い換えると、V の正枠 $e = (e_i)$ に対して W の枠 $\lambda e = (\lambda e_i)$ が正のときに λ は向きを保つ。向きを保つ線形写像は線形同型である。

例 5.4. 例えば $\mathbb{R}^n$ における標準枠 $u = (u_i)$ に対して、体積要素 ${u_1}^* \wedge \cdots \wedge {u_n}^*$ の代表する向きを $\mathbb{R}^n$ の標準の向きという。以下では、$\mathbb{R}^n$ を標準の向きをもったベクトル空間と考える。

■計量と体積要素 V を向きづけられた実ベクトル空間、g を V の不定計量、(s, t) を g の符号数とする。このとき適当な正枠 $e = (e_i)$ で $g(e_i, e_j) = \varepsilon_i \delta_{i,j}$ を満たすものが存在する。ここで ε_i は $\varepsilon_i = 1$ $(1 \le i \le s)$, $\varepsilon_i = -1$ $(s+1 \le i \le s+t)$ である。このような枠を (V, g) における正の**正規直交枠 (orthonormal frame)** と呼ぶ。

(V, g) の体積要素 ω を正の正規直交枠 e を用いて

$$\omega = {e_1}^* \wedge \cdots \wedge {e_n}^*$$

により定義しよう。これが正の正規直交枠 e の選びかたに依らないことが次のようにして分かる。

$x = (x_1, \cdots, x_n)$ を別の正の枠 (正規直交とは仮定しない) とし、$x_j = \sum_i a_{ij} e_i$ とすると、${e_i}^* = \sum_j a_{ij} {x_j}^*$ である。よって $A = (a_{ij})$ とおくと ${e_1}^* \wedge \cdots \wedge {e_n}^* = (\det A) {x_1}^* \wedge \cdots \wedge {x_n}^*$ であるが、$g_{ij} = g(x_i, x_j) = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} g(e_k, e_l) = \sum_{k,l} a_{ki} a_{lj} \varepsilon_k \delta_{kl}$ であるから、$\det(g_{ij}) = (\det A)^2 \cdot (\det F) = (\det A)^2 \cdot (-1)^t$, すなわち $|\det(g_{ij})| = (\det A)^2$ が成り立つ。ところが x は正の枠だから、$\det A > 0$、$\det A = \sqrt{|\det(g_{ij})|}$, である。したがって、

$$\omega = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, {x_1}^* \wedge \cdots \wedge {x_n}^* \quad (g_{ij} = g(x_i, x_j)). \tag{13}$$

とくに $x = (x_i)$ が正規直交枠ならば $|\det(g_{ij})| = 1$ だから $\omega = {x_1}^* \wedge \cdots \wedge {x_n}^*$ となって、ω は正の正規直交枠の選び方に依存しないことが分かる。この ω を向きづけられた計量ベクトル空間 (V, g) の体積要素と呼ぶ。ω を一般の正枠 $x = (x_i)$ を用いて表したものが式 (13) である。

ω を双対枠と同じ記号 e^* で表すことがある。

■保体積変換 $(V, g), (V', g')$ を向きづけられた n 次元計量ベクトル空間とし、ω, ω' をそれぞれの体積要素とする。

$f : V \to V'$ を等長線形写像とする。すなわち $f^* g' = g$ を満たす線形写像とする。このとき、f は単射だから今の場合、V から V' への線形同型である。$x = (x_i)$ を V の正枠とすると、$x'_i = f(x_i)$ で定められる $x' = (x'_i)$ は V' の正または負の枠である。

$$\omega = \sqrt{|\det(g_{ij})|}\, {x_i}^* \wedge \cdots \wedge {x_n}^*,$$
$$\omega' = \pm \sqrt{|\det(g'_{ij})|}\, {x'_i}^* \wedge \cdots \wedge {x'_n}^*.$$

ここで $g_{ij} = g(x_i, x_j)$, $g'_{ij} = g'(x'_i, x'_j)$ であるが、f は等長だから $g_{ij} = g'_{ij}$ が成り立つ。また $f^* {x'_i}^* = {x_i}^*$ である。ゆえに

$$f^* \omega' = \pm \omega.$$

このような線形同型を**保体積変換 (volume preserving transformation)** と呼ぶ。

すなわち $\dim V = \dim V' < \infty$ ならば等長線形変換は保体積変換である。f がさらに向きを保つならば

$$f^* \omega' = \omega.$$

■**Hodge の $*$作用素**　(V,g) を向きづけられた計量ベクトル空間とし、(s,t) を g の符号数とする。任意の正の正規直交枠 $e=(e_1,\cdots,e_n)$ に対して n-ベクトル $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ が定義される。これを枠と同じ記号 e で表す。n-ベクトル e が e の選び方に依らないことが体積要素の場合と同様の論法で分かる。これを向きづけられた計量ベクトル空間 (V,g) の**単位 n-ベクトル**と呼ぶ。単位 n-ベクトル e と体積要素 e^* の間には

$$g(e)=(-1)^t e^*$$

の関係がある。

さて $x\in\wedge(V)$ に対して $*x\in\wedge(V)$ を (V,g) の単位 n-ベクトル e を用いて

$$*x=i_{g(x)}e$$

により定義しよう。x が p-ベクトルならば $*x$ は $(n-p)$-ベクトルである。作用素 $*:\wedge(V)\to\wedge(V)$ は **Hodge の $*$作用素**(スター作用素) と呼ばれている。$e_1,\cdots,e_n$ を正の正規直交枠とすれば、

$$*e_I=(-1)^{t_I}\operatorname{sgn}(I,I')e_{I'}$$

が成り立つ。ここで $I\subset\{1,\cdots,n\}$, I' は I の補集合, t_I は e_I に含まれる負ベクトルの数を表す。実際、

$$g(e_I)=(-1)^{t_I}{e_I}^*$$

だから、式 (11) により $*e_I=(-1)^{t_I}i_{e_i^*}e=(-1)^{t_I}\operatorname{sgn}\left(\begin{smallmatrix}N\\ I,N\setminus I\end{smallmatrix}\right)e_{N\setminus I}$.

練習問題 5.7. 次の式を証明せよ。

$$**x=(-1)^t(-1)^{p(n-p)}x\quad(x\in\wedge^p(V)),$$

$$x\wedge *y=g(x,y)e\quad(x,y\in\wedge^p(V)),$$

$$g(*x,*y)=(-1)^t g(x,y).$$

(ヒント：何れも x,y に関して線形だから $x=e_I, y=e_J$ について示せば十分である)

練習問題 5.8. 前の問題の結果を使って、次に述べることを証明せよ。

(i) g が正定値の場合、$*$ は直交変換 (長さを変えない一次変換) である：$\|*x\|=\|x\|$.

(ii) $n=2p$ (p は奇数) の場合 (g は不定でもいい)、任意の $x\in\wedge^p(V)$ に対して、$g(x,*x)=0$ が成り立つ。例えば、$n=2$ の場合、任意の $x\in V$ に対して $x\perp *x$。

(iii) $n=2$, g が正定値の場合、$\|x\|=1$ ならば $(x,*x)$ は正の正規直交枠である。

例 5.5. V を正定値計量 g をもった向きづけられた 3 次元ベクトル空間とする。$e=(e_1,e_2,e_3)$ を正の正規直交枠とし、$x=x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$ とすると、$*x=x_1(e_2\wedge e_3)+x_2(e_3\wedge e_1)+x_3(e_1\wedge e_2)$ である。$x,y\in V$ に対して $*(x\wedge y)\in V$ は x と y の**ベクトル**積と呼ばれ、$x\times y$ と書かれる。

$*$ 作用素は $\wedge(V^*)$ の元 (交代形式) に対しても定義することができる。すなわち $\theta\in\wedge(V^*)$ に対して $*\theta\in\wedge(V^*)$ を

$$*\theta=i_{g^{-1}(\theta)}e^*$$

により定義する。交代形式に対する $*$ 作用素の性質はもちろん多ベクトルに対する $*$ 作用素の性質と同じである。両者の関係は次のようになる：

$$g(*x)=(-1)^t*g(x)\quad(x\in\wedge(V)).$$

付記 $*$ 作用素は、その定義から明らかなように V の向きに依存する (さらに言うと V の計量 g にも依存する)。今、V の計量 g の方は固定して考えて、向きの方を変えてみよう。例えば正枠の負枠への変更は向きの変更を伴う。向きを変えると、$*$ は $-*$ に変わる。したがって $x \in \wedge^p(V)$ に対する $y = *x \in \wedge^{n-p}(V)$ も符号を変えて、$-y$ に変わる。このように "向きを変えたときに符号が変わる多ベクトル" は本来の多ベクトルとは考えられないので、擬・多ベクトル (pseudo multi-vector) と呼ぶ。擬・多ベクトルはすべて $*x$ (x は多ベクトル) の形をしている。例えば上の例でベクトル x, y に対し $x \times y = *(x \wedge y)$ は擬ベクトルである。擬ベクトル $*x$ (x は 2-ベクトル) とベクトル y に対して外積 $(*x) \times y = *((*x) \wedge y)$ はベクトルである。一般に $*$ を偶数個含む積は多ベクトルで、奇数個含む積は擬・多ベクトルである。

■法ベクトル (V, g) を計量ベクトル空間とする。簡単のために g は正定値であると仮定する。V の部分空間 W に対して

$$W^\perp = \{\, u \in V \mid g(x, u) = 0 \ (x \in W) \,\}$$

を (g に関して) W に直交する補空間といい、$W^\perp$ に属するベクトルを W の**法ベクトル**と呼ぶ。

補題 5.27. V を向きづけられた n 次元ベクトル空間とし、Ω を V の体積要素とする。W を V の $(n-p)$ 次元の部分空間とし、X を W の補空間とする：$V = W \oplus X$。このとき、任意の $\omega \in \wedge^{n-p}(W^*)$ に対して、

$$\omega = \iota^*(i_x \Omega)$$

を満たす $x \in \wedge^p(X)$ が唯一つ存在する。ここで $\iota : W \to V$ は自然な単射である。つまり対応 $x \in \wedge^p(X) \mapsto \omega \in \wedge^{n-p}(W^*)$ は線形同型である。

証明 V の正枠 $e = (e_i)$ を $e_1, \cdots, e_p$ が X の基で、$e_{p+1}, \cdots, e_n$ が W の基となるようにとる。このとき $\Omega = a\, e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n{}^*$ $(a > 0)$ となっているから、$a \neq 1$ ならば e_1 を $a^{-1} e_1$ で置き換えて、$a = 1$ になるように e を選んでおく。さらに、$\bar{e}_j = e_{p+j}$ $(j = 1, \cdots, n-p)$ とおいて、W の基を書き直しておくと、$\langle\, \iota^*(e_{p+j}^*) \,,\, \bar{e}_k \,\rangle = \langle\, e_{p+j}^* \,,\, \iota(\bar{e}_k) \,\rangle = \langle\, e_{p+j}^* \,,\, e_{p+k} \,\rangle = \delta_{jk}$ だから $\iota^*(e_{p+j}^*) = \bar{e}_j^*$ である。すると

$$i_{e_1 \wedge \cdots \wedge e_p} \Omega = e_{p+1}^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$$

だから

$$\iota^*(i_{e_1 \wedge \cdots \wedge e_p} \Omega) = \bar{e}_1^* \wedge \cdots \wedge \bar{e}_{n-p}^*$$

となる。$e_1 \wedge \cdots \wedge e_p$ は $\wedge^p(X)$ の基で、$\bar{e}_1^* \wedge \cdots \wedge \bar{e}_{n-p}^*$ は $\wedge^{n-p}(W)$ の基だから、この式から補題の主張は明らかである。 □

(V, g) を向きづけられた n 次元の計量ベクトル空間とし、簡単のため $g \in \mathrm{T}^2(V^*)$ は正定値であると仮定する。W を $(n-1)$ 次元の部分空間とし、これにも向きを付ける。$\iota : W \to V$ を自然な単射とすると、$\iota^* g \in \mathrm{T}^2(W^*)$ は W の正定値計量である。$e^*, \bar{e}^*$ をそれぞれ $(V, g), (W, \iota^* g)$ の体積要素とする。このとき、前の補題により

$$\bar{e}^* = \iota^*(i_u e^*)$$

を満たす法ベクトル $u \in W^\perp$ が唯一つ存在する。

命題 5.28. $\bar{e}^*$ に対応する法ベクトル u に関して次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned}&\|u\| = \sqrt{g(u,u)} = 1,\\ &\iota^*(i_x e^*) = g(x,u)\,\bar{e}^* \quad (x \in V) \quad \text{あるいは}\\ &\iota^*(*\theta) = \langle \theta, u \rangle\, \bar{e}^* \quad (\theta \in V^*).\end{aligned} \tag{14}$$

$(x_1, \cdots, x_{n-1})$ が W の正枠ならば $(u, x_1, \cdots, x_{n-1})$ は V の正枠である。

証明 V の正の正規直交枠 $e = (e_i)$ を $e_1, \cdots, e_{n-1}$ が W の正枠になるようにとることができる。実際、$e_1, \cdots, e_{n-1}$ がもし負の枠であれば、$e_1, \cdots, e_{n-1}, e_n$ を $e_1, \cdots, -e_{n-1}, -e_n$ で置き換えれば済むことだからである。$k = 1, \cdots, n-1$ に対して $\bar{e}_k = e_k$ とおくと、前の補題の証明でも述べたように $\iota^*(e_k^*) = \bar{e}_k^*$ が成り立つ。$\bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_{n-1}$ は W の正の正規直交枠だから $\bar{e}^* = \bar{e}_1^* \wedge \cdots \wedge \bar{e}_{n-1}^*$ である。
さて、$i_{e_k} e^* = (-1)^{k-1} e_1^* \wedge \cdots \wedge \widehat{e_k^*} \wedge \cdots \wedge e_n^*$ だから

$$\iota^*(i_{e_k} e^*) = \begin{cases} 0 & (k \neq n) \\ (-1)^{n-1} \bar{e}^* & (k = n). \end{cases}$$

である。$u = a e_n$ とおくと $\bar{e}^* = \iota^*(i_u e^*) = a(-1)^{n-1} \bar{e}^*$. すなわち $a = (-1)^{n-1}$ である。ここから $\|u\| = 1$ は明らかである。一方、

$$g(e_k, u) = (-1)^{n-1} g(e_k, e_n) = \begin{cases} 0 & (k \neq n) \\ (-1)^{n-1} & (k = n) \end{cases}$$

だから $\iota^*(i_{e_k} e^*) = g(e_k, u)\bar{e}^*$ がすべての k に対して成り立つ。したがって任意の $x \in V$ に対して $\iota^*(i_x e^*) = g(x, u)\,\bar{e}^*$ が成り立つ。
$(x_1, \cdots, x_{n-1})$ が W の正枠ならば

$$e^*(u, x_1, \cdots, x_{n-1}) = (i_u e^*)(x_1, \cdots, x_{n-1}) = \bar{e}^*(x_1, \cdots, x_{n-1}) > 0.$$

したがって、$(u, x_1, \cdots, x_{n-1})$ は V の正枠である。 □

付記 式 (14) の物理的意味に触れておこう。u は W の法ベクトルだから、θ が連続物体 (例えば水) の "流れ" を表すとき、$\iota^*(*\theta) = \langle \theta, u \rangle\, \bar{e}^*$ は W を通って (u の向きに) 流れ出る物体の量 (発散) を表す。

6 クリフォード代数入門

6.1 二次形式

■本書での二次形式の定義 V を K-ベクトル空間とする。記号 $\mathrm{L}(V^2; K)$, $\mathrm{A}(V^2; K)$ でそれぞれ、$V \times V$ 上の双一次形式、交代形式を表したことを思い出そう。$\mathrm{A}(V^2; K)$ は $\mathrm{L}(V^2; K)$ の部分空間である。

本書では V の**二次形式**とは商空間 $\mathrm{L}(V^2; K)/\mathrm{A}(V^2; K)$ の元であると定義する。すなわち $g, g' \in \mathrm{L}(V^2; K)$ は $g - g' \in \mathrm{A}(V^2; K)$ のときに "同値" であると考え、g の同値類を $f = [g]$ と書いて、V の二次形式と呼ぶのである。g は f **を代表する双一次形式**であるという。

命題 6.1. V を K-ベクトル空間とし、K の標数 $\neq 2$ とする。このとき V の任意の二次形式 f に対して、f を代表する対称双一次形式 g が唯一つ存在する。

証明 $f = [g]$ とする。K の標数 $\neq 2$ だから 2 は可逆元である。そこで $g' = \frac{1}{2}(g + {}^{t}g)$ とおくと、g' は対称で、$g - g' = \frac{1}{2}(g - {}^{t}g)$ は交代形式だから g' もまた f を代表する双一次形式である。
(一意性) g'' を f を代表する別の対称双一次形式とすると、$g' - g''$ は対称かつ交代的で K の標数 $\neq 2$ だから $g' - g'' = 0$ でなければならない。 □

二次形式 $f = [g]$ に対して、関数 $f' : V \to K$ を $f'(x) = g(x, x)$ により定義する。f' は well-defined である。この関数 f' を取り敢えず "二次形式 f の定義する関数" と呼んでおく。

命題 6.2. f_1, f_2 を二次形式、f_i' を f_i の定義する関数とする。このとき $f_1' = f_2'$ ならば $f_1 = f_2$ である。

証明 $f_1 = [g_1], f_2 = [g_2]$ とし、$h = g_1 - g_2$ とおくと、仮定から $h(x, x) = g_1(x, x) - g_2(x, x) = f_1'(x) - f_2'(x) = 0$ である。すなわち $h \in \mathrm{A}(V^2 ; K)$ であり、g_1 と g_2 は同値。したがって、$f_1 = f_2$. □

命題 6.3. 二次形式 f の定義する関数 f' は、次の性質をもつ関数 $f' : V \to K$ として特徴づけられる。

1. $f'(ax) = a^2 f'(x) \quad (a \in K, x \in V)$.
2. $B(x, y) = f'(x + y) - f'(x) - f'(y)$ で定義される関数 $B : V \times V \to K$ は双一次形式である。

証明 任意の二次形式 f に対して f の定義する関数 f' が上の二つの性質をもつことは容易に確かめられる。
逆に f' を上の性質をもつ任意の関数とする。簡単のため V は有限次元であると仮定し、$e_1, \cdots, e_n$ を V の順序付けられた基底とする。
任意の $p > 0$ と $x_i \in V$ $(i = 1 \cdots p)$ に対して $f'(\sum_{i=1}^{p} x_i) = \sum_{i=1}^{p} f'(x_i) + \sum_{i<j} B(x_i, x_j)$ が成り立つ。これは p に関する帰納法により確かめられる。よって V の任意の元 $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$ に対して $f'(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i{}^2 f'(e_i) + \sum_{i<j} a_i a_j B(e_i, e_j)$ である。
$x, y \in V$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} c_j e_j$ に対して $g(x, y)$ を $g(x, y) = \sum_i a_i c_i f'(e_i) + \sum_{i<j} a_i c_j B(e_i, e_j)$ により定義すると関数 $g : V \times V \to K$ は双一次形式で任意の $x \in V$ に対し $g(x, x) = f'(x)$ である。すなわち、f' は二次形式 $f = [g]$ の定義する関数 f' である。 □

注意. V の次元が無限の場合は、V の基底に全順序をもうけて後は上と同様にできる。なお、K の標数が $\neq 2$ の場合は、f に対して $g = \frac{1}{2}B$ とおけば十分である。

以降、二次形式 f と f の定義する関数 f' を同一視して、$f'(x)$ と書くかわりに $f(x)$ と書くことにしよう。

$B(x, y) = f(x + y) - f(x) - f(y)$ により定義される関数 B は $V \times V$ 上の対称双一次形式である。これを二次形式 f に**付随する双一次形式**と呼ぶ。

命題 6.4. f を V の二次形式、B を f に付随する双一次形式とすると、

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + B(x, y) \quad (x, y \in V).$$

一般に

$$f(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i<j} B(x_i, x_j) \quad (x_i \in V)$$

が成り立つ。

証明 最初の式は B の定義から明らか。$n \geq 1$ に関する一般の式の証明は、帰納法による。まず $n = 1$ の場合は

明らか。$n-1$ までは正しいとすると、

$$\begin{aligned}
&f(\textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i) = f(\sum_{i=1}^{n-1} x_i + x_n) = f(\sum_{i=1}^{n-1} x_i) + f(x_n) + B(\sum_{i=1}^{n-1} x_i, x_n)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i<j(\le n-1)} B(x_i, x_j) + f(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} B(x_i, x_n)\\
&= \textstyle\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \sum_{i<j} B(x_i, x_j).
\end{aligned}$$

□

練習問題 6.1. $f=[g]$ を二次形式、B を f に付随する双一次形式とすると、$B(x,y)=g(x,y)+g(y,x)$ つまり $B=g+{}^{t}g$ である。とくに g が対称ならば $B=2g$ である。以上のことを示せ。

■等長線形写像 二次形式 f を付けたベクトル空間 (V,f) を二次形式付きのベクトル空間と呼んでおく。$(V,f),(V',f')$ を二次形式付きの K-ベクトル空間、B,B' をそれぞれ f,f' に付随する双一次形式とする。線形写像 $h:V\to V'$ は

$$f(x)=f'(h(x))\quad (x\in V)$$

を満たすときに**等長 (isometry)** であるという。h が等長ならば、$B(x,y)=B'(h(x),h(y))$ $(x,y\in V)$ つまり $h^*B'=B$ を満たす。g,g' はそれぞれ f,f' を代表する双一次形式だとすると、$h^*g'=g$ ならば h は等長である。体 K の標数が $\neq 2$ で、g,g' がどちらも対称ならばその逆も成り立つ。

■双一次形式の二次形式への作用 $f=[g]$ を V の二次形式とし、h を $V\times V$ 上の双一次形式とする。このとき、二次形式 $[g+h]$ は f の代表元 g の選び方に依らないから、これを $f+h$ と書く：$f+h=[g+h]$。写像 $(f,h)\mapsto f+h$ は加法群 $\mathrm{L}(V^2;K)$ の二次形式全体の空間 $\mathrm{L}(V^2;K)/\mathrm{A}(V^2;K)$ への作用と考えられる。

■二次形式の係数拡大 V を K-ベクトル空間、L を K の拡大体、$V^L=L\otimes_K V$ を V の L への係数拡大とする。

V の二次形式 $f=[g]$ から自然なやりかたで V^L の二次形式を作ることができる。すなわち、$g:V\times V\to K$ は K-双一次形式だから L-双一次形式 $g^L:V^L\times V^L\to K^L\simeq L$ が $g^L(1\otimes x,1\otimes y)=1\otimes g(x,y)=g(x,y)$ により定義される。$g-g'$ が交代ならば、$g^L-g'^L=(g-g')^L$ もまた交代だから二次形式 $f^L=[g^L]$ は f を代表する双一次形式に依らず、f だけで決まる。そこで f^L を二次形式 f の V^L への延長と呼ぶことにしよう。f^L の定義により

$$f^L(1\otimes x)=f(x)\quad (x\in V)$$

が成り立つ。実際、$f^L(1\otimes x)=g^L(1\otimes x,1\otimes x)=g(x,x)=f(x)$.

命題 6.5. L を K の拡大体、f を K-ベクトル空間 V の二次形式、B を f に付随する双一次形式とすると、B^L は f^L に付随する双一次形式である。

証明 B^L は B の延長だから $B^L(1\otimes x,1\otimes y)=B(x,y)=f(x+y)-f(x)-f(y)$. 一方、$f^L$ に付随する双一次形式を B' とおくと、$B'(1\otimes x,1\otimes y)=f^L(1\otimes x+1\otimes y)-f^L(1\otimes x)-f^L(1\otimes y)=f(x+y)-f(x)-f(y)$. よって $B^L(1\otimes x,1\otimes y)=B'(1\otimes x,1\otimes y)$ であり、どちらも L-双一次形式だから、これは $B^L=B'$ を意味する。 □

■二次形式の直和 V_1,V_2 を K-ベクトル空間とし、ベクトル空間の直和 $V=V_1\oplus V_2$ の元を $x=(x_1,x_2)$, $y=(y_1,y_2),\cdots$ と記す。

$f_i = [g_i]$ を V_i の二次形式とする ($i = 1, 2$)。

$$g(x, y) = g_1(x_1, y_1) + g_2(x_2, y_2)$$

により定義される $V \times V$ 上の双一次形式 g を双一次形式 g_1 と g_2 の直和と呼ぶ。

容易に確かめられるように、g が代表する二次形式 f は f_1, f_2 の代表元 g_1, g_2 の選び方に依らず、f_1, f_2 だけで決まる。そこでこれを f を $f_1 \oplus f_2$ と書いて、二次形式 f_1 と f_2 の**直和**と呼ぶ。

練習問題 6.2. V_i を自然に $V_1 \oplus V_2$ の部分空間と考える ($i = 1, 2$)。f_i を V_i の二次形式、$f = f_1 \oplus f_2$ とし、B を f に付随する双一次形式とする。このとき

$$B(x_1, x_2) = 0 \quad (x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$$

あるいは同じことだが、

$$f(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2) \quad (x_1 \in V_1, x_2 \in V_2)$$

が成り立つ。これを示せ。

6.2 クリフォード代数

■クリフォード代数の定義 f を V 上の二次形式とする。

クリフォード代数は外積代数を定義したのと同じやりかたで定義される。

すなわち V のテンソル代数 $\mathrm{T}(V)$ を考え、$x^2 - f(x)$ ($x \in V$) の形の元が生成する両側イデアルを $\mathcal{I}_f$ と書く：

$$\mathcal{I}_f = \left\{ \sum y \cdot (x^2 - f(x)) \cdot z \,\middle|\, x \in V, y, z \in \mathrm{T}(V) \right\}$$

ここで y, z は $\mathrm{T}(V)$ の純テンソルであると仮定してもよい。

外積代数の場合と違って、$\mathcal{I}_f$ は一般に $\mathbb{Z}$ 型の次数付きイデアルでないことに注意する。

ところが $\mathbb{Z}_2$ 型次数付け

$$\mathrm{T}(V) = \mathrm{T}^{(0)}(V) \oplus \mathrm{T}^{(1)}(V),$$
$$\mathrm{T}^{(0)}(V) = \oplus_{p \equiv 0} \mathrm{T}^p(V), \quad \mathrm{T}^{(1)}(V) = \oplus_{p \equiv 1} \mathrm{T}^p(V)$$

を考えると、$\mathcal{I}_f$ は次数付きイデアルであることが分かる。そこで $\mathbb{Z}_2$ 型次数付き代数の商

$$\mathrm{T}(V)/\mathcal{I}_f = \mathrm{T}^{(0)}(V)/\mathcal{I}_f^{(0)} \;\oplus\; \mathrm{T}^{-}(V)/\mathcal{I}_f^{(1)}$$

を考え、これを (V, f) の**クリフォード代数**と呼ぶ。ここで $\mathcal{I}_f^{(p)} = \mathrm{T}^{(p)}(V) \cap \mathcal{I}_f$ である。

$\mathcal{C}(V, f) = \mathrm{T}(V)/\mathcal{I}_f, \mathcal{C}^{(p)}(V, f) = \mathrm{T}^{(p)}(V)/\mathcal{I}_f^{(p)}$ と書くと、

$$\mathcal{C}(V, f) = \mathcal{C}^{(0)}(V, f) \oplus \mathcal{C}^{(1)}(V, f).$$

$\mathcal{C}^{(0)}(V, f)$ を $\mathcal{C}(V, f)$ の**偶部分 (even part)**、$\mathcal{C}^{(1)}(V, f)$ を**奇部分 (odd part)** と呼ぶ。

$\pi_f : \mathrm{T}(V) \to \mathcal{C}(V, f)$ を自然な全射とすると、$\mathcal{C}(V, f)$ は単位的・結合的代数で $1_f = \pi_f(1)$ が乗法単位元になる。

偶部分は単位的部分代数である。

注意. $f = 0$ の場合、クリフォード代数 $\mathcal{C}(V, 0)$ は $\mathbb{Z}_2$ 型に次数付けられた外積代数 $\wedge(V)$ である。すなわち

$$\mathcal{C}(V, 0) = \wedge(V) = \underbrace{\Big(K \oplus \wedge^2(V) \oplus \cdots \Big)}_{\wedge^{(0)}(V)} \oplus \underbrace{\Big(V \oplus \wedge^3(V) \cdots \Big)}_{\wedge^{(1)}(V)}.$$

■**クリフォード代数の写像** $\beta_f : V \to \mathcal{C}(V,f)$ を $\beta_f = \pi_f \circ \alpha$ で定義される線形写像とする。

β_f を V から $\mathcal{C}(V,f)$ への "自然な写像" と呼ぶ。期待される通り、β_f は実は単射なのだが、それは未だ証明されていないからこれを "自然な単射" とは今は呼ばない。

実は $K = \mathrm{T}^0(V)$ 上で π_f が単射であることも未だ証明されていない。言い換えると、$1_f \neq 0$ が証明されていない。

これらの証明は、後で述べる「外積代数との線形同型」で行うことにする。

なお、π_f, β_f は f が分かっているときは、それぞれたんに π, β と書く。

次の命題はクリフォード代数の定義から直ちに導かれることである。

命題 6.6. $\pi : \mathrm{T}(V) \to \mathcal{C}(V,f)$ を自然な全射とする。$\mathcal{C}^{(0)}(V,f), \mathcal{C}^{(1)}(V,f)$ はそれぞれ

$$\pi(x_1)\cdots\pi(x_p) \quad (x_i \in V, p : \text{偶数}),$$
$$\pi(x_1)\cdots\pi(x_p) \quad (x_i \in V, p : \text{奇数})$$

のかたちの元の有限和から成る。

証明 $\mathrm{T}^{(0)}(V), \mathrm{T}^{(1)}((V))$ がそれぞれ純テンソル

$$x_1\cdots x_p \quad (x_i \in V, p : \text{偶数}),$$
$$x_1\cdots x_p \quad (x_i \in V, p : \text{奇数})$$

の有限和から成っており、π は $\mathrm{T}^{(p)}(V)$ を $\mathcal{C}^{(p)}(V,f)$ の上に写す準同型だから明らかである。 □

クリフォード代数は次にのべる普遍写像性質で特徴づけられる。

命題 6.7 (普遍写像性質). β を V から $\mathcal{C}(V,f)$ への自然な写像とする。このとき

(i) 任意の $x \in V$ に対して $\beta(x)^2 = f(x)1_f$ が成り立つ。

(ii) F を任意の単位的結合代数とし、$h : V \to F$ を $h(x)^2 = f(x)1_F$ $(x \in V)$ なる線形写像とすると、$h = h' \circ \beta$ を満たす単位的準同型 $h' : \mathcal{C}(V,f) \to F$ が唯一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\beta"] \arrow[dr, "h"'] & \mathcal{C}(V,f) \arrow[d, "h'"] \\ & F \end{tikzcd}$$

(iii) さらに F が $\mathbb{Z}_2$ 型の次数付き代数 $F = F^{(0)} \oplus F^{(1)}$ で、$h(V) \subset F^{(1)}$ となっているならば、h' は次数付き代数の準同型である。

証明 (i) $x^2 - f(x) \in \mathcal{I}_f$ $(x \in V)$ だから $\pi(x^2 - f(x)) = \pi(x)^2 - f(x)1_f = 0$. すなわち $\pi(x)^2 = f(x)1_f$. あるいは $\beta(x) = \pi(\alpha(x)) = \pi(x)$ だから $\beta(x)^2 = f(x)1_f$.

(ii) $h : V \to F$ に対して $h = h'' \circ \alpha$ を満たす単位的準同型 $\psi : \mathrm{T}(V) \to F$ が唯一つ存在する。$h' : \mathcal{C}(V,f) \to F$ を単位的準同型とすると、$h = h' \circ \beta \Longleftrightarrow h' \circ \pi = h''$ が成り立つ。よって問題は $h' \circ \pi = h''$ を満たす h' の存在と一意性である。このうち一意性のほうは π が全射だから明らかである。以下で存在を示そう。$x \in V$ ならば $h''(x^2 - f(x)) = h''(x)^2 - f(x)h''(1) = h'(x)^2 - f(x)1_F = 0$. すなわち $x^2 - f(x) \in \mathrm{Ker}\,\psi$ である。ゆえに $\mathcal{I}_f \subset \mathrm{Ker}\,\psi$ が成り立つ。そこで写像 $\varphi : \mathcal{C}(V,f) \to F$ が $\varphi(\pi(x)) = h''(x)$ により定義される。φ は単位的準同型

である。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \mathrm{T}(V) \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[ddl, bend left, "h''"] \\
& \mathcal{C}(V, f) \arrow[d, "h'"] & \\
& F &
\end{tikzcd}$$

(iii) 仮定から 任意の $x \in V$ に対して $h'(\beta(x)) = h'(\pi(x)) \in F^{(1)}$ である。ゆえに

$$\begin{aligned}
&h'(\pi(x_1)\cdots\pi(x_p)) = h'(\pi(x_1))\cdots h'(\pi(x_p)) \\
&\in F^{(0)}\ (p:\text{偶数}),\quad \in F^{(1)}\ (p:\text{奇数}).
\end{aligned}$$

したがって $h'(\mathcal{C}^{(0)}(V, f)) \subset F^{(0)}, h'(\mathcal{C}^{(1)}(V, f)) \subset F^{(1)}$ であり、h' は次数付き代数の準同型である。 □

命題 6.8. (V_i, f_i) を二次形式付きの K-ベクトル空間、$\mathcal{C}(V_i, f_i)$ をそれぞれのクリフォード代数、$\beta_i : V_i \to \mathcal{C}(V_i, f_i)$ を自然な写像とする $(i = 1, 2)$。$h : V_1 \to V_2$ を等長線形写像とする。このとき、

$$\beta_2 \circ h = \mathcal{C}(h) \circ \beta_1$$

を満たす (下図を可換にする) 単位的準同型 $\mathcal{C}(h) : \mathcal{C}(V_1, f_1) \to \mathcal{C}(V_2, f_2)$ が唯一つ存在する。$\mathcal{C}(h)$ は次数付き代数の準同型で、これを**等長線形写像 h が引き起こすクリフォード代数の準同型**と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd}
V_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "h"'] & \mathcal{C}(V_1, f_1) \arrow[d, "\mathcal{C}(h)"] \\
V_2 \arrow[r, "\beta_2"'] & \mathcal{C}(V_2, f_2)
\end{tikzcd}$$

証明 $(\beta_2 \circ h(x))^2 = (\beta_2(h(x)))^2 = f_2(h(x))1_{f_2} = f_1(x)1_{f_2}$. よって命題 6.7 により図式を可換にする単位的準同型 $\mathcal{C}(h)$ が唯一つ存在する。さらに $\beta_2 \circ h(V_1) \subset \beta_2(V_2) \subset \mathcal{C}^{(1)}(V_2, f_2)$ だから、$\mathcal{C}(h)$ は次数付き代数の準同型である。

逆に h' が

□

練習問題 6.3. f を K-ベクトル空間 V の二次形式、B を f に付随する双一次形式とし、F を単位的・結合的代数、$h : V \to F$ を線形写像とする。

$$h(x)^2 = f(x)1_F \quad (x \in V)$$

ならば

$$h(x)h(y) + h(y)h(x) = B(x, y)1_F \quad (x, y \in V)$$

が成り立つことを示せ。K の標数 $\neq 2$ ならば逆も成り立つことを示せ。

とくに V から $\mathcal{C}(V, f)$ への自然な写像 β に関して

$$\beta(x)\beta(y) + \beta(y)\beta(x) = B(x, y)1_f \quad (x, y \in V)$$

が成り立つ。

6.3 外積代数との線形同型

■漸化式で定義されるテンソル代数の作用素 (V, f) のクリフォード代数は実は、ベクトル空間としては V の外積代数 $\wedge(V)$ に線形同型である。しかも同型は、K の標数が $\neq 2$ の場合にはカノニカルに与えることができる。これを今から証明しよう。本書ではテンソル代数の作用素を用いた方法を紹介する。

次の補題で言っていることは当り前のことだが、今後頻繁に参照されるので、明示しておく。

補題 6.9. $u \in \mathrm{T}(V)$ と双一次写像 $\Phi : V \times \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V), \Psi : V \times \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$ が与えられてあるとき、

$$\varphi(1) = u, \tag{15}$$
$$\varphi(x \cdot y) = \Phi(x, y) + \Psi(x, \varphi(y)) \quad (x \in V, y \in \mathrm{T}(V)) \tag{16}$$

を満たす線形写像 $\varphi : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$ が唯一つ存在する。φ は漸化式 (15), (16) で定義されているという。(16) を代数 $\mathrm{L}(\mathrm{T}(V))$ の言葉で言い換えると

$$\varphi \circ e_x = \Phi_x + \Psi_x \circ \varphi \quad (x \in V). \tag{17}$$

ただし $\Phi, \Psi \in \mathrm{L}(V, \mathrm{L}(\mathrm{T}(V)))$ と考えて、$\Phi_x = \Phi(x), \Psi_x = \Psi(x)$ とおいた。

証明 (16) において $y \in \mathrm{T}^{p-1}(V)$ ($p > 0$ は任意) と仮定しても同値である。(15) で φ の $\mathrm{T}^0(V) = K$ 上での振舞は決まってしまうから、(15) と (16) は φ を帰納的に定義したことになる。実際、(16) の右辺は $x \in V$, $y \in \mathrm{T}^{p-1}(V)$ に関して双一次だから、線形写像 $V \otimes \mathrm{T}^{p-1}(V) \simeq \mathrm{T}^p(V) \to \mathrm{T}(V)$ を定める。ここから φ の存在と一意性は明らかである。 □

早速、補題 6.9 を応用してみよう。

補題 6.10. $\xi \in V^*$ に対して、線形写像 $D_\xi : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$ が漸化式

$$D_\xi(1) = 0,$$
$$D_\xi(x \cdot y) = \langle \xi, x \rangle y - x \cdot D_\xi(y) \quad (x \in V, y \in \mathrm{T}(V)) \tag{18}$$

により定義される。D_ξ は $D_\xi(x) = \langle \xi, x \rangle$ ($x \in V$) を満たす $\mathrm{T}(V)$ の唯一つの -1 次反微分である。逆に、$\mathrm{T}(V)$ の任意の -1 次反微分は唯一つの $\xi \in V^*$ を用いて D_ξ の形に書くことができる。

証明 $\Phi(x, y) = \langle \xi, x \rangle y, \Psi(x, z) = -x \cdot z$ とおくと、Φ, Ψ は双一次で、(18) の右辺は $\Phi(x, y) + \Psi(x, D_\xi(y))$ と書けるから、これは D_ξ の漸化式である。
$x \in V$ ならば $D_\xi(x) = D_\xi(x \cdot 1) = \langle \xi, x \rangle 1 - x \cdot D_\xi(1) = \langle \xi, x \rangle$ だから

$$D_\xi(x \cdot y) = D_\xi(x) \cdot y - x \cdot D_\xi(y) \quad (x \in V, y \in \mathrm{T}(V)).$$

ここから任意の $p > 0$ と $x_1, \cdots, x_p \in V$ に対して

$$D_\xi(x_1 \cdots x_p \cdot y) = D_\xi(x_1 \cdots x_p) \cdot y + (-1)^p x_1 \cdots x_p \cdot D_\xi(y)$$

の成り立つことを、帰納的に示すことができる。故に任意の $x \in \mathrm{T}^p(V)$ は純テンソルの和だから

$$D_\xi(x \cdot y) = D_\xi(x) \cdot y + (-1)^p x \cdot D_\xi(y) \quad (x \in \mathrm{T}^p(V), y \in \mathrm{T}(V)).$$

すなわち D_ξ は -1 次の反微分である。
逆は反微分の定義から明らかである。 □

命題 6.11. $D_\xi \in \mathrm{L}_{-1}(\,\mathrm{T}(V)\,)$ は $\xi \in V^*$ に線形に依存し、

$$(D_\xi)^2 = 0 \tag{19}$$

を満たす。故に、$\xi, \eta \in V^*$ ならば

$$D_\xi \cdot D_\eta = -D_\eta \cdot D_\xi. \tag{20}$$

証明 $\xi, \eta \in V^*$, $a \in K$ に対し $(D_\xi + aD_\eta)(1) = 0$, $(D_\xi + aD_\eta)(x \cdot y) = \langle \xi + a\eta\,,\, x \rangle y - x \cdot (D_\xi + aD_\eta)(y)$ $(x \in V, y \in \mathrm{T}(V))$ だから補題 6.10 で述べた一意性により、$D_\xi + aD_\eta = D_{\xi + a\eta}$ でなければならない。つまり D_ξ は ξ に線形に依存する。

同様に $(D_\xi)^2(1) = 0$, $(D_\xi)^2(x \cdot y) = x \cdot (D_\xi)^2(y)$ だから、やはり補題 6.9 で述べた一意性により $(D_\xi)^2 = 0$ でなければならない。

ゆえに $0 = (D_{\xi+\eta})^2 = (D_\xi + D_\eta)^2 = D_\xi \cdot D_\eta + D_\eta \cdot D_\xi$. □

命題 6.12. f を V の二次形式とする。任意の $\xi \in V^*$ に対して

$$D_\xi(\mathfrak{I}_f) \subset \mathfrak{I}_f.$$

証明 任意の $x \in V, z \in \mathrm{T}(V)$ に対して $D_\xi((x^2 - f(x)) \cdot z)$ を計算すると、これが $(x^2 - f(x)) \cdot D_\xi(z) (\in \mathfrak{I}_f)$ に等しいことが分かる。つまり $S = \{\, y \in \mathfrak{I}_f \;\big|\; D_\xi(y) \in \mathfrak{I}_f \,\}$ とおくならば、

$$(x^2 - f(x)) \cdot z \in S \quad (x \in V, z \in \mathrm{T}(V)). \tag{21}$$

任意の $y \in V, w \in S$ に対して $y \cdot w \in \mathfrak{I}_f$, $D_\xi(y \cdot w) = \langle \xi\,,\, y \rangle w - y \cdot D_\xi(w) \in \mathfrak{I}_f$ だから $y \cdot w \in S$ である。ここから帰納的に

$$y_1 \cdots y_p \cdot w \in S \quad (y_i \in V, w \in S\,) \tag{22}$$

が導かれる。(21) と (22) を併せて

$$y_1 \cdots y_p \cdot (x^2 - f(x)) \cdot z \in S \quad (y_i \in V, x \in V, z \in \mathrm{T}(V)).$$

ところが任意の $y \in \mathrm{T}(V)$ は純テンソルの和だからこれは

$$y \cdot (x^2 - f(x)) \cdot z \in S \quad (x \in V, y, z \in \mathrm{T}(V))$$

を意味する。すなわち、$\mathfrak{I}_f \subset S$, $D_\xi(\mathfrak{I}_f) \subset \mathfrak{I}_f$. □

系 6.13. D_ξ は $\mathfrak{C}(V, f)$ 上の奇次の反微分 D'_ξ を引き起こす。すなわち

$$D'_\xi \circ \pi_f = \pi_f \circ D_\xi$$

を満たす $\mathfrak{C}(V, f)$ の線形変換 D'_ξ が唯一つ存在し、D'_ξ は $D'_\xi(\beta_f(x)) = \langle \xi\,,\, x \rangle 1_f$ で特徴づけられる奇次の反微分である。

$f = 0$ の場合には D'_ξ は

$$D'_\xi(x) = \langle \xi\,,\, x \rangle \quad (x \in V)$$

で特徴づけられる $\wedge(V)$ の -1 次反微分であり、これは ξ による内部積演算 i_ξ に等しい。

命題 6.14. 双一次形式 $h \in \mathrm{L}(V^2\,;\,K) \simeq \mathrm{L}(V\,,\,V^*)$ に対し、

$$\varphi_h(1) = 1,$$
$$\varphi_h(x \cdot y) = x \cdot \varphi_h(y) - D_{h(x)}(\varphi_h(y)) \quad (x \in V, y \in \mathrm{T}(V))$$

を満たす線形写像 $\varphi_h : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$ が唯一つ存在する。φ_h は $\mathrm{T}(V)$ の $\mathbb{Z}_2$-型の次数を保つ。任意の $\xi \in V^*$ に対し

$$\varphi_h \circ D_\xi = D_\xi \circ \varphi_h \tag{23}$$

が成り立つ。

証明 $\Phi(x,y) = 0, \Psi(x,z) = x \cdot z - D_{h(x)}(z)$ とおくと、第二式の右辺は $\Phi(x,y) + \Psi(x, \varphi_h(y))$ と書ける。ゆえにこれは φ_h を定義する漸化式である。φ_h が $\mathbb{Z}_2$-型の次数を保つことは定義式から明らかであろう。
後半の証明にも補題 6.9 を使う：$\varphi_h \circ D_\xi$ は

$$(\varphi_h \circ D_\xi)(1) = 0,$$
$$(\varphi_h \circ D_\xi)(x \cdot y) = \langle\, \xi\,,\, x \,\rangle \varphi_h(y) - x \cdot (\varphi_h \circ D_\xi)(y) + (D_{h(x)} \circ \varphi_h \circ D_\xi)(y) \quad (x \in V, y \in \mathrm{T}(V)).$$

を満たす。他方、$D_\xi \cdot \varphi_h$ は

$$(D_\xi \circ \varphi_h)(1) = 0,$$
$$(D_\xi \circ \varphi_h)(x \cdot y) = \langle\, \xi\,,\, x \,\rangle \varphi_h(y) - x \cdot (D_\xi \circ \varphi_h)(y) - (D_\xi \circ D_{h(x)} \circ \varphi_h)(y) \quad (x \in V, y \in \mathrm{T}(V)).$$

を満たす。ところが、$D_\xi \circ D_{h(x)} \circ \varphi_h = -D_{h(x)} \circ D_\xi \circ \varphi_h$ だから、$\Phi(x,y) = \langle\, \xi\,,\, x \,\rangle \varphi_h(y), \Psi(x,z) = -x \cdot z + D_{h(x)}(z)$ とおくと、$\varphi_h \circ D_\xi$ と $D_\xi \circ \varphi_h$ は ψ に関する同じ漸化式

$$\psi(1) = 0,$$
$$\psi(x \cdot y) = \Phi(x,y) + \Psi(x, \psi(y)) \quad (x \in V, y \in \mathrm{T}(V))$$

の解である。ゆえに二つは相等しい。 □

命題 6.15.

$$\varphi_0 = \mathrm{id},$$
$$\varphi_{h+h'} = \varphi_h \circ \varphi_{h'} \quad (h, h' \in \mathrm{L}(V\,,\,V^*))$$

が成り立つ。すなわち $\varphi_h : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$ は $\mathbb{Z}_2$-型次数付きベクトル空間の線形同型で、$h \in \mathrm{L}(V\,,\,V^*) \mapsto \varphi_h \in GL(\mathrm{T}(V))$ は群準同型である。

証明 ここでも補題 6.9 を使う。$\varphi_0(1) = 1$ かつ $x \in V, y \in \mathrm{T}(V)$ に対し $\varphi_0(x \cdot y) = x \cdot \varphi_0(y)$ だから一意性により $\varphi_0 = \mathrm{id}$ である。
また $(\varphi_h \circ \varphi_{h'})(1) = 1,$ かつ $x \in V, y \in \mathrm{T}(V)$ に対し $(\varphi_h \circ \varphi_{h'})(x \cdot y) = x \cdot (\varphi_h \circ \varphi_{h'})(y) - (D_{h(x)+h'(x)} \circ \varphi_h \circ \varphi_{h'})(y)$ だから、やはり一意性により $\varphi_h \circ \varphi_{h'} = \varphi_{h+h'}$ である。 □

命題 6.16. f, f' を二次形式、h を双一次形式、$f' = f + h$ とする。すなわち $f'(x) = f(x) + h(x,x)$ $(x \in V)$ とする。このとき $\varphi_h(\mathfrak{I}_f) = \mathfrak{I}_{f'}$ である。

証明 $\varphi_h(\mathcal{I}_f) \subset \mathcal{I}_{f'}$ を示せば十分である。何故なら $f = f' - h$ だから、このとき $\varphi_{-h}(\mathcal{I}_{f'}) \subset \mathcal{I}_f$ も成立し、$\mathcal{I}_{f'} = \varphi_0(\mathcal{I}_{f'}) = \varphi_h \circ \varphi_{-h}(\mathcal{I}_{f'}) \subset \varphi_h(\mathcal{I}_f)$, ゆえに $\varphi_h(\mathcal{I}_f) = \mathcal{I}_{f'}$ である。

任意の $x \in V, z \in \mathrm{T}(V)$ に対して $\varphi_h((x^2 - f(x)) \cdot z)$ を計算すると、(19), (23) を用いてこれが $(x^2 - f'(x)) \cdot \varphi_h(z)$ に等しいことが分かる。つまり $S = \{\, z \in \mathcal{I}_f \,\big|\, \varphi_h(z) \in \mathcal{I}_{f'} \,\}$ とおくならば

$$(x^2 - f(x)) \cdot z \in S \tag{24}$$

である。また任意の $y \in V, w \in S$ に対して命題 6.12 により $\varphi_h(y \cdot w) = y \cdot \varphi_h(w) - D_{h(y)} \circ \varphi_h(w) \in \mathcal{I}_{f'}$, すなわち $y \cdot w \in S$ である。ここから任意の自然数 p に対して

$$y_1 \cdots y_p \cdot w \in S \quad (y_i \in V, w \in S) \tag{25}$$

の成り立つことが帰納的に導かれる。(24) と (25) を併せて

$$y_1 \cdots y_p \cdot (x^2 - f(x)) \cdot z \in S \quad (y_i \in V, x \in V, z \in \mathrm{T}(V)).$$

ところが任意の $y \in \mathrm{T}(V)$ は純斉次元の和だからこれは

$$y \cdot (x^2 - f(x)) \cdot z \in S \quad (x \in V, y, z \in \mathrm{T}(V))$$

を意味する。すなわち $\mathcal{I}_f \subset S, \varphi_h(\mathcal{I}_f) \subset \mathcal{I}_{f'}$。 □

■Chevalley の線形同型 $f' = f + h$ とする。命題 6.16 により $\varphi_{f,h} \circ \pi_f = \pi_{f'} \circ \varphi_h$ を満たす線形写像 $\varphi_{f,h} : \mathcal{C}(V, f) \to \mathcal{C}(V, f')$ が唯一つ存在する。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}(V) \arrow[r, "\varphi_h"] \arrow[d, "\pi_f"'] & \mathrm{T}(V) \arrow[d, "\pi_{f'}"] \\
\mathcal{C}(V, f) \arrow[r, "\varphi_{f,h}"'] & \mathcal{C}(V, f')
\end{tikzcd}$$

$\varphi_{f,h}$ は $\mathbb{Z}_2$-型の次数を保つ線形同型でその逆写像は

$${\varphi_{f,h}}^{-1} = \varphi_{f+h,-h}$$

である。

命題 6.17. f, f' を二次形式、h を双一次形式、$f' = f + h$ とする。

$$\varphi_{f,h}(1_f) = 1_{f'},$$
$$\varphi_{f,h} \circ \beta_f = \beta_{f'}$$

が成り立つ。ここで、$\beta_f, \beta_{f'}$ はそれぞれ V の $\mathcal{C}(V, f), \mathcal{C}(V, f')$ の中への自然な写像である。

証明 線形同型 $\varphi_h : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$ の性質を思い出そう。$\varphi_h(1) = 1$ だから $\varphi_{f,h}(1_f) = \varphi_{f,h} \circ \pi_f(1) = \pi_{f'} \circ \varphi_h(1) = \pi_{f'}(1) = 1_{f'}$ である。また $x \in V$ ならば $\varphi_h(x) = x$。これは $\alpha : V \to \mathrm{T}(V)$ を自然な単射とすれば、$\varphi_h \circ \alpha = \alpha$ を意味する。したがって、$\varphi_{f,h} \circ \beta_f = \varphi_{f,h} \circ \pi_f \circ \alpha = \pi_{f'} \circ \varphi_h \circ \alpha = \pi_{f'} \circ \alpha = \beta_{f'}$ である。 □

さて我々に興味のあるのは、二次形式 $f = [g]$ に対し、双一次形式 h が $h = -g$ の場合である。このとき、$f + (-g) = [0]$ となる。$\psi_g = \varphi_{f,-g}$ とおくと、

$$\psi_g : \mathcal{C}(V, f) \to \mathcal{C}(V, [0])(\simeq \wedge(V)).$$

ψ_g は **Chevalley の線形同型**と呼ばれることがある。この線形同型は一般に f の代表元 g のとり方に依存する。しかし K の標数が $\neq 2$ の場合には g を対称双一次形式と決めれば (それは一つなのだから)、ψ_g をカノニカルに与えることができる。

命題 6.18. $n = \dim V < \infty$ ならば、$\dim \mathcal{C}(V, f) = 2^n, \dim \mathcal{C}^{(0)}(V, f) = 2^{n-1}$ である。

証明 ψ_g は次数を保つ線形同型である。すなわち、$\psi_g(\mathcal{C}^{(p)}(V, f)) = \wedge^{(p)}(V)$ $(p = 0, 1)$ が成り立つ。よって $\dim \mathcal{C}(V, f) = \dim \wedge(V) = 2^n, \dim \mathcal{C}^{(0)}(V, f) = \dim \wedge^{(0)}(V) = 2^{n-1}$. □

$\wedge(V) = K \oplus V \oplus \wedge^2(V) \oplus \cdots$ だから $1_0 = 1 \neq 0$ であり、$\beta_0 = \beta$ は単射である。ところが $\psi_g(1_f) = 1, \psi_g \circ \beta_f = \beta$ だから一般に次のことが成り立つのである。

命題 6.19. f を二次形式、β_f を自然な写像 $V \to \mathcal{C}(V, f)$、1_f を $\mathcal{C}(V, f)$ の単位元とする。(a) $1_f \neq 0$ である。(b) β_f は単射である。

そこで以下では、$\beta_f : V \to \mathcal{C}(V, f)$ を自然な単射と呼ぶことにしよう。V の元 x と $\mathcal{C}(V, f)$ の元 $\beta_f(x) = \pi_f(x)$ を同一視することにより、V を $\mathcal{C}(V, f)$ の部分空間と見なすことができる。また、K の元 a と $\mathcal{C}(V, f)$ の元 $a1_f$ を同一視して K を $\mathcal{C}(V, f)$ の部分空間を見なすことも可能である。このような同一視をすると、クリフォード代数の基本関係式は

$$x^2 = f(x)1_f \quad \text{または} \quad x^2 = f(x) \quad (x \in V)$$

の形になる。

命題 6.20. (命題 6.8 のつづき) $h' : \mathcal{C}(V_1, f_1) \to \mathcal{C}(V_2, f_2)$ を単位的準同型とする。h' は $h'(V_1) \subset V_2$ を満たすならば、唯一つの等長線形写像 $h : V_1 \to V_2$ が引き起こすクリフォード代数の準同型 $\mathcal{C}(h)$ である。

証明 線形写像 $h : V_1 \to V_2$ を $h = h'|_{V_1}$ により定義する。クリフォード代数の基本関係式 $x^2 = f_1(x)1_{f_1}$ $(x \in V_1)$ の両辺に単位的準同型 h' を作用させると、$h'(x^2) = (h'(x))^2 = f_1(x)1_{f_2}$. 一方、基本関係式 $y^2 = f_2(y)1_{f_2}$ $(y \in V_2)$ の y に $h(x)$ を代入すると、$(h(x))^2 = (h'(x))^2 = f_2(h(x))1_{f_2}$. ゆえに $f_1(x) = f_2(h(x))$ となって、h は等長である。h と h' のあいだには、$\beta_2(h(x)) = h'(\beta_1(x))$ $(x \in V_1)$ が成り立っているから、命題 6.8 で述べた一意性により $h' = \mathcal{C}(h)$ である。このような h が一意であることは明らかである。 □

練習問題 6.4. $e_1, \ldots, e_n$ を V の基底とすると、$\{\, e_{i_1} \cdots e_{i_p} \mid i_1 < \cdots < i_p, 0 \leq p \leq n \,\}$ は $\mathcal{C}(V, f)$ の基底である ($p = 0$ のときは $e_{i_1} \cdots e_{i_p} = 1$ とする)。このことを証明せよ。

補題 6.21. 次の式が成り立つ：

$$\varphi_{f,h}(1) = 1,$$
$$\varphi_{f,h}(x \cdot y) = x \cdot \varphi_{f,h}(y) - D'_{h(x)}(\varphi_{f,h}(y)) \quad (x \in V, y \in \mathcal{C}(V, f)).$$

証明 $f' = f + h$ とおく。$\varphi_h(1) = 1$ の両辺に $\pi_{f'}$ を作用させると、左辺は $\pi_{f'} \circ \varphi_h(1) = \varphi_{f,h}(1_f)$、右辺は $1_{f'}$。$1_f = 1_{f'} = 1$ を同一視すれば、第一の式が得られる。

同様に $x \in V,\ y \in \mathrm{T}(V)$ に対する式 $\varphi_h(x \cdot y) = x \cdot \varphi_h(y) - D_{h(x)}(\varphi_h(y))$ の両辺に $\pi_{f'}$ を作用させると、左辺は $\varphi_{f,h}(\pi_f(x) \cdot \pi_f(y))$、右辺は $\pi_{f'}(x) \cdot \varphi_{f,h}(\pi_f(y)) - D'_{h(x)}(\varphi_{f,h}(\pi_f(y)))$. ここで $\pi_f(x) = \pi_{f'}(x) = x$ を同一視し、$\pi_f(y)$ を新たに y と書き直すと、第二式が得られる。 □

命題 6.22. $f = [g]$ とし、$\psi_g : \mathcal{C}(V, f) \to \wedge(V)$ を Chevalley の線形同型とする。このとき、

$$\psi_g(1) = 1,$$
$$\psi_g(x \cdot y) = x \wedge \psi_g(y) + i_{g(x)}(\psi_g(y)) \quad (x \in V, y \in \mathcal{C}(V, f))$$

ここで $i_{g(x)}(\cdot)$ は $g(x) \in V^*$ による $\wedge(V)$ の内部積である。

参考までに $x, y, z, \cdots \in V$ に対して、$\psi_g(x \cdot y \cdot z \cdots)$ を計算してみると、次のようになる：

$$\begin{aligned}
&\psi_g(1) = 1,\\
&\psi_g(x) = x,\\
&\psi_g(x \cdot y) = x \wedge y + g(\,x\,,\,y\,),\\
&\psi_g(x \cdot y \cdot z) = x \wedge y \wedge z + g(\,x\,,\,y\,)\,z - g(\,x\,,\,z\,)\,y + g(\,y\,,\,z\,)\,x,\\
&\cdots\\
&\cdots
\end{aligned}$$

一般に次の式が成り立つ：$x_i \in V$ に対して

$$\begin{aligned}
&\psi_g(x_1 x_2 x_3 \cdots x_n)\\
&= \textstyle\sum_{m=0}^{[n/2]} \sum_{\sigma \in \Pi_m} \mathrm{sgn}\,(\sigma)\; g\,(\,x_{\sigma(1)}\,,\,x_{\sigma(2)}\,) \cdots g\,(\,x_{\sigma(2m-1)}\,,\,x_{\sigma(2m)}\,) \cdot x_{\sigma(2m+1)} \wedge \cdots \wedge x_{\sigma(2m)}.
\end{aligned}$$

ここで Π_m は次の条件を満たす $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ の集まりである：$\sigma(i) < \sigma(i+1)\ (1 \le i \le 2m-1),\ \sigma(1) < \sigma(3) < \cdots < \sigma(2m-1),\ \sigma(2m+1) < \cdots < \sigma(n)$. 要するに $\sigma \in \Pi_m$ は集合 $\{\,1, \cdots, n\,\}$ から m 個のペア (非順序対) を選んでつくる組合せである。

練習問題 6.5. (興味のある人だけ) 上の式を証明せよ。

6.4 一般論のつづき

■二次形式の直和と捩れテンソル積 f_i を V_i の二次形式 $(i = 1, 2)$、f を f_1 と f_2 の直和とする。$\beta : V_1 \oplus V_2 \to \mathcal{C}(V_1, f_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(V_2, f_2)$ を

$$\beta(x) = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2 \quad (x = (x_1, x_2))$$

で定義される線形写像とする。$\beta(x)^2 = x_1 \otimes 1 + 1 \otimes x_2$ の両辺を二乗すると

$$\begin{aligned}
&\beta(x)^2 = (x_1 \otimes 1)^2 + (1 \otimes x_2)^2 + (x_1 \otimes 1)(1 \otimes x_2) + (1 \otimes x_2)(x_1 \otimes 1)\\
&= (x_1)^2 \otimes 1 + 1 \otimes (x_2)^2 + x_1 \otimes x_2 - x_1 \otimes x_2.
\end{aligned}$$

ここで末項の符号が負なのは、捩れテンソル積だからである。ゆえに

$$\begin{aligned}
&\beta(x)^2 = f_1(x_1) \otimes 1 + 1 \otimes f_2(x_2)\\
&= (f_1(x_1) + f_2(x_2))(1 \otimes 1) = f(x)\ 1 \otimes 1.
\end{aligned}$$

したがって単位的準同型 $\varphi : \mathcal{C}(V_1 \oplus V_2, f_1 \oplus f_2) \to \mathcal{C}(V_1, f_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(V_2, f_2)$ で $\beta = \varphi \circ \beta'$ を満たすものが唯一つ存在している。

$$\begin{tikzcd} V_1 \oplus V_2 \arrow[r, "\beta'"] \arrow[dr, "\beta"'] & \mathcal{C}(V_1 \oplus V_2, f_1 \oplus f_2) \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathcal{C}(V_1, f_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(V_2, f_2) \end{tikzcd}$$

命題 6.23. φ は次数付き代数の単位的同型である。

証明 $\mathcal{C}(V_1, f_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(V_2, f_2)$ と β が普遍写像性質をもつこと、すなわち任意の単位的結合代数 F と $h(x)^2 = f(x)1_F$ $(x \in V_1 \oplus V_2)$ なる線形写像 $h : V_1 \oplus V_2 \to F$ とに対して $h = h' \circ \beta$ なる単位的準同型 $h' : \mathcal{C}(V_1, f_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(V_2, f_2) \to F$ が唯一つ存在することを示せば十分である。

以下で、$i = 1, 2$ とする。$\varepsilon_i : V_i \to V_1 \oplus V_2$, $\beta_i : V_i \to \mathcal{C}(V_i, f_i)$, $\theta_i : \mathcal{C}(V_i, f_i) \to \mathcal{C}(V_1, f_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(V_2, f_2)$ を自然な単射とする。すると $\beta \circ \varepsilon_i = \theta_i \circ \beta_i$ $(i = 1, 2)$ が成り立つ。$h_i = h \circ \varepsilon_i$ とおくと $h_i(x_i)^2 = h(x_i)^2 = f(x_i)1_F = f_i(x_i)1_F$ だから単位的準同型 $h'_i : \mathcal{C}(V_i, f_i) \to F$ が一意的に決まって、$h_i = h \circ \varepsilon_i = h'_i \circ \beta_i$ を満たす。$x_i \in V_i$ に対しては $h_1(x_1)h_2(x_2) = -h_2(x_2)h_1(x_1)$ だから一般の斉次元 $x_i \in \mathcal{C}^{p_i}(V_i, f_i)$ に対しては $h_1(x_1)h_2(x_2) = (-1)^{p_1 p_2} h_2(x_2)h_1(x_1)$ が成り立つ。ここで $p_i \in \mathbb{Z}_2$ である。したがって捩れテンソル積の普遍写像性質により単位的準同型 $h' : \mathcal{C}(V_1, f_2) \hat{\otimes} \mathcal{C}(V_2, f_2) \to F$ で、$h' \circ \theta_i = h'_i$ なるものが唯一つ存在することになる。$h \circ \varepsilon_i = h'_i \circ \beta_i = h' \circ \theta_i \circ \beta_i = h' \circ \beta \circ \varepsilon_i$ だから $h = h' \circ \beta$ でなければならない。これで h' の存在が示せた。
(h' の一意性) 逆に単位的準同型 $h'' : \mathcal{C}(V_1, f_2) \hat{\otimes} \mathcal{C}(V_2, f_2) \to F$ が $h = h'' \circ \beta$ を満たすならば、$(h'' \circ \theta_i) \circ \beta_i = h'' \circ \beta \circ \varepsilon_i = h \circ \varepsilon_i = h'_i \circ \beta_i$ だから $h'' \circ \theta_i = h'_i, h'' = h'$ でなければならない。

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[rr, "\beta_i"] \arrow[dd, "\varepsilon_i"'] \arrow[dr, "h \circ \varepsilon_i"] & & \mathcal{C}(V_i, f_i) \arrow[dd, "\theta_i"] \arrow[dl, "h'_i"'] \\ & F & \\ V_1 \oplus V_2 \arrow[rr, "\beta"'] \arrow[ur, "h"] & & \mathcal{C}(V_1, f_1) \hat{\otimes} \mathcal{C}(V_2, f_2) \arrow[ul, "h'"'] \end{tikzcd}$$

□

■クリフォード代数の係数拡大 f を K-ベクトル空間 V の二次形式、L を K の拡大体、f^L を V^L への二次形式 f の延長、すなわち $f^L(1 \otimes x) = f(x)$ $(x \in V)$ で特徴づけられる V^L の二次形式とする。

$\beta : V \to \mathcal{C}(V, f), \beta' : V^L \to \mathcal{C}(V^L, f^L)$ を自然な単射とし、$\beta^L : V^L \to \mathcal{C}(V, f)^L$ を β の L-線形写像への延長とする。

このとき、任意の $z \in V^L$ に対して

$$(\beta^L(z))^2 = f^L(z)$$

が成り立つ。実際、$z = a_1 \otimes x_1 + \cdots + a_n \otimes x_n$ と表しておくと、$\beta^L(z) = a_1 \otimes \beta(x_1) + \cdots + a_n \otimes \beta(x_n)$ である。ゆえに

$$\begin{aligned} (\beta^L(z))^2 &= \textstyle\sum_i a_i^2 \otimes \beta(x_i)^2 + \sum_{i<j} a_i a_j \otimes (\beta(x_i)\beta(x_j) + \beta(x_j)\beta(x_i)) \\ &= \textstyle\sum_i a_i^2 \otimes f(x_i) + \sum_{i<j} a_i a_j \otimes B(x_i, x_j) \\ &= \Big(\textstyle\sum_i a_i^2 f(x_i) + \sum_{i<j} a_i a_j B(x_i, x_j) \Big) 1 \otimes 1 \end{aligned}$$

ここで B は f に付随する双一次形式である。ところが $f^L(z) = \sum_i a_i^2 f(x_i) + \sum_{i<j} a_i a_j B(x_i, x_j)$. ゆえに $(\beta^L(z))^2 = \left(f^L(z) \right) 1 \otimes 1 = f^L(z)$.

したがって、$\beta^L = \varphi \circ \beta'$ を満たす単位的準同型 $\mathcal{C}(V^L, f^L) \to \mathcal{C}(V, f)^L$ が唯一つ存在している。

$$\begin{tikzcd}
V^L \arrow[r, "\beta'"] \arrow[dr, "\beta^L"'] & \mathcal{C}(V^L, f^L) \arrow[d, "\varphi"] \\
& \mathcal{C}(V, f)^L
\end{tikzcd}$$

命題 6.24. φ は次数付き代数の同型である。

証明 $\mathcal{C}(V, f)^L$ と β^L が普遍写像性質をもつことを示せばよい。すなわち、F を L 上の単位的結合代数とし、$h : V^L \to F$ を $h(z)^2 = f^L(z)1_F$ $(z \in V^L)$ なる L-線形写像とすると $h = h' \circ \beta^L$ を満たす単位的準同型 $h' : \mathcal{C}(V, f)^L \to F$ が唯一つ存在することを示せばよい。
$\tau : V \to V^L, \tau' : \mathcal{C}(V, f) \to \mathcal{C}(V, f)^L$ を自然な単射とする：$\tau(x) = 1 \otimes x, \tau'(x') = 1 \otimes x'$.
すると $\beta^L \circ \tau = \tau' \circ \beta$ である。
$h \circ \tau : V \to F$ は K-線形で、$(h \circ \tau(x))^2 = h(1 \circ x)^2 = f(1 \otimes x)1_F = f(x)1_F$ だから、クリフォード代数の性質により、$h \circ \tau = h'' \circ \beta$ を満たす単位的 K-準同型 $h'' : \mathcal{C}(V, f) \to F$ が唯一つ存在していることが分かる。
$h' : \mathcal{C}(V, f)^L \to F$ を h'' の延長とする。すなわち $h'' = h' \circ \tau'$ を満たす唯一の L-線形写像とする。h' は単位的 L-準同型である。
ここで写像 $h' \circ \beta^L : V^L \to F$ を考えると、これは L-線形で $(h' \circ \beta^L) \circ \tau = h' \circ \tau' \circ \beta = h'' \circ \beta = h \circ \tau$ を満たしている。ゆえに $h = h' \circ \beta^L$ でなければならない。
(一意性) 逆に $h' : \mathcal{C}(V, f)^L \to F$ は $h = h' \circ \beta^L$ なる単位的準同型だとすると、$h' \circ \tau' : \mathcal{C}(V, f) \to F$ は単位的 K-準同型で、$(h' \circ \tau') \circ \beta = h' \circ \beta^L \circ \tau = h \circ \tau$. である。ゆえに $h' \circ \tau' = h''$ でなければならない。すなわち h' は h'' の延長である。ここから h' の一意性は明らかである。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\beta"] \arrow[dr, "h \circ \tau"] \arrow[dd, "\tau"'] & & \mathcal{C}(V, f) \arrow[dl, "h''"'] \arrow[dd, "\tau'"] \\
& F & \\
V^L \arrow[rr, "\beta^L"'] \arrow[ur, "h"'] & & \mathcal{C}(V, f)^L \arrow[ul, "h'"]
\end{tikzcd}$$

□

6.5 クリフォード代数の例〜実クリフォード代数〜

■実クリフォード代数 $n < \infty, s + t = n$ とし、実 n 空間 $\mathbb{R}^n$ 上の二次形式 $f_{s,t}(x) = \sum_{i=1}^{s} (x_i)^2 - \sum_{j=1}^{t} (x_{s+j})^2$ を考える。二次形式 $f_{s,t}$ を付けた 実 n 空間 $(\mathbb{R}^n, f_{s,t})$ を $\mathbb{R}^{s,t}$ と書こう。$f_{s,t}$ は符号数が (s, t) の計量 (非退化対称双一次形式) $g_{s,t}$ で代表されるから、$\mathbb{R}^{s,t}$ を実計量ベクトル空間 $(\mathbb{R}^n, g_{s,t})$ と見なすこともできる。線形代数でよく知られているように、$\mathbb{R}^{s,t}$ と $\mathbb{R}^{s',t'}$ が等長線形同型ならば、$s = s', t = t'$ である (Sylvester の慣性法則)。

同様に複素 n 空間 $\mathbb{C}^n$ 上の二次形式 $f_{s,t}(z) = \sum_{i=1}^{s} (z_i)^2 - \sum_{j=1}^{t} (z_{s+j})^2$ に対しても、$f_{s,t}$ を付けた空間 $\mathbb{C}^{s,t}$ を考えることができる。$\mathbb{C}^{s,t}$ は $\mathbb{R}^{s,t}$ の複素化 ($\mathbb{C}$ への係数拡大) である。ところがこの場合は $s + t = s' + t' = n$ な

らば等長線形同型の意味で $\mathbb{C}^{s,t} \simeq \mathbb{C}^{s',t'} \simeq \mathbb{C}^{n,0}$ である。実際、写像 $(z_1, \cdots, z_n) \mapsto (z_1, \cdots, z_s, iz_{s+1}, \cdots, iz_{s+t})$ が $\mathbb{C}^{n,0}$ から $\mathbb{C}^{s,t}$ への等長線形同型になっている。よって $\mathbb{C}^{s,t}$ のクリフォード代数を考える場合には、$\mathbb{C}^{n,0}$ だけに限定すれば十分である。

$\mathbb{R}^{n,0}, \mathbb{R}^{0,n}, \mathbb{R}^{s,t}$ $(s, t > 0)$, $\mathbb{C}^{n,0}$ のクリフォード代数の構造はよく知られており、n 及び s, t に関して周期性と呼ばれる現象が見られる。ここでは実クリフォード代数の構造と 8-周期性について簡単に触れておこう。

補題 6.25. E は $\mathbb{R}$ 上の単位的・結合的代数で、$\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in E$ があって、

$$\gamma_i^2 = \begin{cases} 1 & (i = 1 \cdots s) \\ -1 & (i = s+1 \cdots s+t), \end{cases}$$
$$\gamma_i \gamma_j + \gamma_j \gamma_i = 0 \quad (i \neq j)$$

を満たしているとする。このとき単位的準同型

$$\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t}) \to E, \quad e_i \mapsto \gamma_i$$

が唯一つ存在する。さらに次のいずれか二つが成り立てば、φ は代数同型である：

- $\dim E = 2^{s+t}$.
- φ は単射。
- φ は全射。

証明 これはクリフォード代数の普遍写像性質からほとんど明らかなことである。詳しい証明は読者に委ねよう。 □

「単位的準同型 $\varphi : \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t}) \to E, \quad e_i \mapsto \gamma_i$ が唯一つ存在し、φ は同型である」という言明を、以下では簡単に

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t}) \simeq E, \quad e_i \mapsto \gamma_i$$

と書こうと思う。ただし E は $\mathbb{Z}_2$ 型次数付き代数であるとは限らない。$\mathbb{Z}_2$ 型次数付き代数であったとしても、φ が次数を保つとは限らない。

命題 6.26. $n \geq 0$ とする。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n,0}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2})$ において

$$\gamma_i = e_i \otimes e_1 e_2 \quad (i = 1, \cdots, n),$$
$$\gamma_{n+1} = 1 \otimes e_1,$$
$$\gamma_{n+2} = 1 \otimes e_2.$$

とおくと、

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n+2}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n,0}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2}), \quad e_i \mapsto \gamma_i \ (i = 1 \cdots n+2). \tag{26}$$

が成り立つ。同様に、$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0})$ において γ_i を前と同じ式によって定義すると、

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+2,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0}), \quad e_i \mapsto \gamma_i \ (i = 1 \cdots n+2). \tag{27}$$

が成り立つ。次に $s,t \geq 0$ とする。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,1})$ において、今度は

$$\begin{aligned}
&\gamma_i = e_i \otimes e_1 e_2 \quad (i = 1, \cdots, s),\\
&\gamma_{s+1} = 1 \otimes e_1,\\
&\gamma_{s+j+1} = e_{s+j} \otimes e_1 e_2, \quad (j = 1, \cdots, t),\\
&\gamma_{s+t+2} = 1 \otimes e_2
\end{aligned}$$

とおくと、

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s+1,t+1}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,1}), \quad e_i \mapsto \gamma_i \quad (i = 1, \cdots, s+t+2) \tag{28}$$

が成り立つ。

証明 $\gamma_i^2 = -1, \gamma_i\gamma_j + \gamma_j\gamma_i = 0 \quad (i \neq j)$ が成り立つから、補題 6.25 により $\varphi(e_i) = \gamma_i$ なる $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n+2})$ から $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n,0}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2})$ への単位的準同型 φ が唯一つ存在する。$\varphi(-e_i e_{n+1} e_{n+2}) = e_i \otimes 1$ $(i = 1 \cdots n)$, $\varphi(e_{n+1}) = 1 \otimes e_1$, $\varphi(e_{n+2}) = 1 \otimes e_2$ だから φ は全射だと分かる。よって次元の比較から、φ は同型でなければならない。これが式 (26) である。同型 (27), (28) も同様にして示せる。 □

系 **6.27.** 次の同型がある。

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{4,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4}), \tag{29}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+4,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n,0}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{4,0}), \tag{30}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n+4}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n}) \otimes \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4}). \tag{31}$$

証明 いずれも (26) と (27) から直ちに導かれる。 □

命題 6.26 に述べたことから、実クリフォード代数は一般に $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,0})$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,0})$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,1})$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0})$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,1})$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2})$ のテンソル積で表されることが分かる。

そこでこれら小さい次元の実クリフォード代数の構造を調べてみる。

命題 6.28. 次の同型がある：

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,0}) \simeq \mathbb{R}.$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,0}) \simeq \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}, \quad e_1 \mapsto (1, -1).$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,1}) \simeq \mathbb{C}, \quad e_1 \mapsto i.$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0}) \simeq \mathrm{M}(2, \mathbb{R}), \quad e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, e_2 \mapsto \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq \mathrm{M}(2, \mathbb{R}), \quad e_1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, e_2 \mapsto \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq \mathbb{H}, \quad e_1 \mapsto i, e_2 \mapsto j$$

証明 この証明は機械的にできることなので、読者の練習問題とする。 □

次にこれら小さい次元のクリフォード代数 $\mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathrm{M}(2, \mathbb{R}), \cdots$ のテンソル積が具体的にどのような代数であるのかを明らかにしてみよう。

補題 6.29. 次の同型がある：

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}^{s,t}) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t}), \quad e_i \mapsto 1 \otimes e_i \tag{32}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{C}^{s+t,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{C}^{s,t}), \quad e_i \mapsto e_i \ (i = 1 \cdots s),\ \sqrt{-1}e_i \ (i = s+1 \cdots s+t) \tag{33}$$

証明 同型 (32) は「クリフォード代数の係数拡大」において既に説明したことであるから、証を要さない。同型 (33) も明らかであろう。 □

命題 6.30. 次の $\mathbb{R}$-代数の同型がある：

$$\begin{aligned}&\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C},\\ &\quad 1 \otimes 1 \mapsto (1,1),\ 1 \otimes i \mapsto (i,-i),\ i \otimes 1 \mapsto (i,i),\ i \otimes i \mapsto (-1,1).\end{aligned} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{C}),\\ &\quad 1 \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, 1 \otimes i \mapsto \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix}, 1 \otimes j \mapsto \begin{pmatrix} & i \\ i & \end{pmatrix}, 1 \otimes k \mapsto \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix},\\ &\quad i \otimes 1 \mapsto \begin{pmatrix} i & \\ & i \end{pmatrix}, i \otimes i \mapsto \begin{pmatrix} -1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, i \otimes j \mapsto \begin{pmatrix} & -1 \\ -1 & \end{pmatrix}, i \otimes k \mapsto \begin{pmatrix} & -i \\ i & \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}&\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{M}(4,\mathbb{R}) \ (\simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R})),\\ &\quad 1 \otimes 1 \mapsto 1 \otimes 1,\ 1 \otimes i \mapsto -p \otimes r,\ 1 \otimes j \mapsto -r \otimes 1,\ 1 \otimes k \mapsto -q \otimes r,\\ &\quad i \otimes 1 \mapsto 1 \otimes r,\ i \otimes i \mapsto p \otimes 1,\ i \otimes j \mapsto r \otimes r,\ i \otimes k \mapsto q \otimes 1,\\ &\quad j \otimes 1 \mapsto r \otimes p,\ j \otimes i \mapsto q \otimes q,\ j \otimes j \mapsto 1 \otimes p,\ j \otimes k \mapsto -p \otimes q,\\ &\quad k \otimes 1 \mapsto r \otimes q,\ k \otimes i \mapsto -q \otimes p,\ k \otimes j \mapsto 1 \otimes q,\ k \otimes k \mapsto p \otimes p,\\ &\quad \text{ここで } 1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}, p = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, q = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix}, r = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{36}$$

証明 同型 (34) は

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,1}) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,0}) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \simeq \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.$$

に、同型 (35) は

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0}) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{C})$$

に他ならない。いずれも補題 6.29 の式 (32) と (33) を使って導く。これらの同型が $1 \otimes 1, 1 \otimes i,$ 等々をそれぞれ指定された元に写すことの確認は読者に任せよう。次に同型 (36) を示す。まずベクトル空間として $\mathbb{H} \simeq \mathbb{R}^4$ である。$a, b \in \mathbb{H}$ に対して、$f_{a,b} \in \mathrm{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ を $f_{a,b}(x) = ax\bar{b}$ により定義する。$f_{a,b}$ は a, b 双方について $\mathbb{R}$-線形だから、$f(a \otimes b) = f_{a,b}$ なる $\mathbb{R}$-線形写像 $f : \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \to \mathrm{L}\left(\mathbb{R}^4\right)$ が唯一つある。$f_{1,1} = 1, f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',bb'}$ 言い換えると $f(1 \otimes 1) = 1, f(a \otimes b) \circ f(a' \otimes b') = f((a \otimes b) \cdot (a' \otimes b'))$ だから、 f は単位的代数の準同型である。さて一般に代数 E が $E \neq 0$ であって、かつ 0 と E 自身以外に両側イデアルをもたないとき、E は**単純 (simple)** であるという。$\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ は単純である (証明は読者に委ねる)。したがって $f \neq 0$ だから $\mathrm{Ker}\, f = 0$ でなければならない。これと、実次元が $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}, \mathrm{M}(4,\mathbb{R})$ のどちらとも 16 であることから f が同型であることが導かれる。f が $1 \otimes 1, 1 \otimes i$ 等々をそれぞれ $1 \otimes 1, -p \otimes r$ 等々に写すことの確認は読者に委ねる。 □

練習問題 6.6. $\mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ が単純代数であることを証明せよ。

命題 6.31 (実クリフォード代数の 8-周期性). $n \geq 0$ とする。次の $\mathbb{R}$-代数の同型がある。

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+8,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(16,\mathbb{R}), \tag{37}$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n+8}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(16,\mathbb{R}). \tag{38}$$

証明 式 (26) と (27) をくり返し使って、

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+8,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n+6}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \\
&\simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+4,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \\
&\simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n+2}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \\
&\simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \\
&\simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \\
&\simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{n,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(16,\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

すなわち (37) を得る。(38) も同様である。 □

$n = 0, \cdots, 7$ に対して $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n,0})$, $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n})$ の形を求めてみると次のようになる ($n = 0, 1, 2$ の式は既に得ているから $n \geq 3$ の式を書く)：

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{3,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{C}),$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,3}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq (\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathbb{H} \oplus \mathbb{H},$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{4,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4}) \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{H}),$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}(\mathbb{R}^{5,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,3}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0}) \simeq (\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \\
&\simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{H}) \oplus \mathrm{M}(2,\mathbb{H}) \ (\simeq (\mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}(2,\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{3,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\
&\simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \simeq \mathrm{M}(4,\mathbb{C}).
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{6,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0}) \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{M}(4,\mathbb{H}).$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,6}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{4,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\
&\simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \simeq \mathrm{M}(8,\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{7,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,5}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2,0}) \simeq \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \simeq \mathrm{M}(8,\mathbb{C}).$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,7}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{5,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,2}) \simeq (\mathrm{M}(2,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}(2,\mathbb{R})) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H} \\
&\simeq \mathrm{M}(8,\mathbb{R}) \oplus \mathrm{M}(8,\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

今までに得た結果を表にしたものを次に掲げる。ここで $M(m, K)$ の代わりに $K(m)$ なる略号を使う：

	$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+8k,0})$	$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n+8k})$
$n = 0$	$\mathbb{R}(16^k)$	$\mathbb{R}(16^k)$
$n = 1$	$\mathbb{R}(16^k) \oplus \mathbb{R}(16^k)$	$\mathbb{C}(16^k)$
$n = 2$	$\mathbb{R}(2 \cdot 16^k)$	$\mathbb{H}(16^k)$
$n = 3$	$\mathbb{C}(2 \cdot 16^k)$	$\mathbb{H}(16^k) \oplus \mathbb{H}(16^k)$
$n = 4$	$\mathbb{H}(2 \cdot 16^k)$	$\mathbb{H}(2 \cdot 16^k)$
$n = 5$	$\mathbb{H}(2 \cdot 16^k) \oplus \mathbb{H}(2 \cdot 16^k)$	$\mathbb{C}(4 \cdot 16^k)$
$n = 6$	$\mathbb{H}(4 \cdot 16^k)$	$\mathbb{R}(8 \cdot 16^k)$
$n = 7$	$\mathbb{C}(8 \cdot 16^k)$	$\mathbb{R}(8 \cdot 16^k) \oplus \mathbb{R}(8 \cdot 16^k)$

■**周期性についてもっと**　不定計量のクリフォード代数 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t})$ についても興味深い現象が見られる：

補題 6.32. $s, t \geq 0$ とする。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4})$ において $\gamma_i = e_i \otimes e_1e_2e_3e_4$ $(i = 1 \cdots s)$, $\gamma_{s+k} = 1 \otimes e_k$ $(k = 1 \cdots 4)$ とおくと

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,4}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4}), \quad e_i \mapsto \gamma_i. \tag{39}$$

同様に $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,t}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{4,0})$ において $\gamma_i = 1 \otimes e_i$ $(i = 1 \cdots 4)$, $\gamma_{4+k} = e_k \otimes e_1e_2e_3e_4$ $(k = 1 \cdots t)$ とおくと、

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{4,t}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,t}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{4,0}), \quad e_i \mapsto \gamma_i. \tag{40}$$

証明 証明は読者に委ねる (命題 6.26 の証明を参考にせよ)。 □

命題 6.33. $s, t \geq 0$ とする。次の $\mathbb{R}$-代数の同型がある：

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t+4}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s+4,t}) \tag{41}$$

証明 証明は $\min(s,t)$ に関する帰納法による。$t = 0$ の場合は、補題 6.32 の式 (39) と 系 6.27 の式 (30) を使って、

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,4}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,4}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,0}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{4,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s+4,0}).$$

$s = 0$ の場合も同様である。ゆえに $\min(s,t) = 0$ の場合に式 (41) は正しい。
次に $s > 0, t > 0$ とすると、帰納法の仮定から

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t+4}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s-1,t-1+4}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s-1+4,t-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s+4,t}).$$

となって、やはり式 (41) は成立する。 □

補題 6.34. $s \geq 0$ とする。$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,s})$ において $\gamma_1 = e_1, \gamma_k = e_1e_k$ $(k = 2 \cdots s+1)$ とおくと、

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s+1,0}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,s}), \quad e_i \mapsto \gamma_i. \tag{42}$$

証明 証明は読者に委ねる (命題 6.26 の証明を参考にせよ)。 □

命題 6.35. $s, t \geq 0$ とする。次の $\mathbb{R}$-代数の同型がある：

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s+1,t}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{t+1,s}) \tag{43}$$

証明 $\min(s,t)$ に関する帰納法による。$s = 0$ または $t = 0$ の場合は既に補題 6.34 で示してある。
$s > 0, t > 0$ の場合は、命題 6.26 の式 (28) を使い、帰納法の仮定から

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s+1,t}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{s-1+1,t-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{t-1+1,s-1}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathcal{C}(\mathbb{R}^{1,1}) \simeq \mathcal{C}(\mathbb{R}^{t+1,s}).$$

□

実クリフォード代数 $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t})$ の偶部分 $\mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R}^{s,t})$ についても次の命題が成り立つ。

命題 6.36. $s, t \geq 0$ とする。$\mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R}^{s,t+1})$ において $\gamma_i = e_ie_{s+t+1}$ $(i = 1, \cdots, s+t)$ とおくと、

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t}) \simeq \mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R}^{s,t+1}), \quad e_i \mapsto \gamma_i. \tag{44}$$

同様に $\mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R}^{t+1,s})$ において $\gamma_i = e_{t+1+i}e_{t+1}$ $(i = 1, \cdots, s)$, $\gamma_{s+j} = e_j e_{t+1}$ $(j = 1, \cdots, t)$ とおくと

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{s,t}) \simeq \mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R}^{t+1,s}) \quad e_i \mapsto \gamma_i. \tag{45}$$

とくに

$$\mathcal{C}(\mathbb{R}^{0,n}) \simeq \mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R}^{0,n+1}) \simeq \mathcal{C}^{(0)}(\mathbb{R}^{n+1,0}). \tag{46}$$

証明 (44) と (45) の証明は読者に委ねる (命題 6.26 の証明を参考にせよ)。(46) は明らかである。 □

参考文献

[1] ブルバキ 「数学原論 代数 第 9 章」 東京図書

[2] 堀田良之 「代数入門 - 群と加群」 裳華房

[3] 横田一郎 「群と表現」 裳華房

[4] M.F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro. *Clifford modules*. Topology 3, Suppl.1 (1964)

[5] N. Bourbaki. *Éléments de Mathématique, Algèbre* Ch.1-3. Springer

[6] C. Chevalley. *The algebraic theory of spinors*, *Collected works of Claude Chevalley*. Springer

[7] C. Chevalley. *The construction and study of certain important algebras, Collected works of Claude Chevalley*. Springer

[8] J. Gallier. *Clifford algebras, Clifford groups, and a generalization of the quaternions*. http://www.cis.upenn.edu/ jean/

[9] H.B. Lawson,Jr. and M.-L. Michelsohn. *Spin geometry*. Princeton

[10] A. Vistoli. *Notes on Clifford algebras, spin groups and triality*. http://homepage.sns.it/vistoli/