テンソル代数、外積代数とクリフォード代数入門

木原浩貴

2010 年 11 月 2 日

1　準備事項

■注意事項　以下で、K は特に断りがなければ、可換体を表す。K 上のベクトル空間を略して K-ベクトル空間と呼ぶ。しかし文脈から係数体 K が分かっているときはたんにベクトル空間とも呼ぶ。

ベクトル空間の次元は有限次元だとは仮定しない。

線形写像、線形変換、一次変換、線形作用素は同義に用いる。あるベクトル空間 V からベクトル空間 W の上への一対一線形写像を線形同型と呼ぶ。

本書を読む上で必要な事項を以下にまとめる。

■多重線形写像　K-ベクトル空間 V, W に対して記号 $\mathrm{L}_K(\,V\,,\,W\,)$ あるいは $\mathrm{L}(\,V\,,\,W\,)$ で K-線形写像 $f : V \to W$ 全体のつくるベクトル空間を表す (加法とスカラー乗法は自然に定義される)。

特に $\mathrm{L}(\,V\,,\,K\,)$ は V の**双対空間**と呼ばれ、V^* と書かれる。

写像 $f : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$ は $f(x_1, \ldots, x_p)$ の各変数 x_i に関して線形のとき**多重線形写像**という ($p = 2$ のときは**双一次写像**ともいう)。

記号 $\mathrm{L}_K(\,V_1, \cdots, V_p\,;\,W\,)$ あるいは $\mathrm{L}(\,V_1, \cdots, V_p\,;\,W\,)$ で多重線形写像全体のつくるベクトル空間を表す。

本書では $V_1 = \cdots = V_p = V$ の場合、$\mathrm{L}(\,\underbrace{V \cdots V}_{p}\,;\,W\,)$ を略して $\mathrm{L}(\,V^p\,;\,W\,)$ と記す。

$f \in \mathrm{L}(\,V_1\,,\mathrm{L}(\,V_2, \cdots, V_p\,;\,W\,)\,)$ に対し、$f'(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1)(x_2, \ldots, x_p)$ で定義される $f' \in \mathrm{L}(\,V_1, V_2, \cdots, V_p\,;\,W\,)$ を対応させる写像は線形同型である。これを自然な同型と呼ぶ。以下、この同型の意味で

$$\mathrm{L}(\,V_1\,,\mathrm{L}(\,V_2, \cdots, V_p\,;\,W\,)\,) \simeq \mathrm{L}(\,V_1, V_2, \cdots, V_p\,;\,W\,)$$

と考える。

とくに $\mathrm{L}(\,V\,,\mathrm{L}(\,V^{p-1}\,;\,W\,)\,) \simeq \mathrm{L}(\,V^p\,;\,W\,)$ が成り立つ。たとえば $\mathrm{L}(\,V\,,\,V^*\,) \simeq \mathrm{L}(\,V^2\,;\,K\,)$ である。

■双対空間と双対写像　V の基 (x_i) に対して V^* の一次独立な元の集合 $(x_i{}^*)$ が $x_i{}^*(x_j) = \delta_{ij}$ により定義される。ここで δ_{ij} は Kronecker のデルタ記号を表す：$\delta_{ij} = 1\ (i = j)$, $\delta_{ij} = 0\ (i \neq j)$。$\dim V < \infty$ ならば V^* は $(x_i{}^*)$ から生成されることが分かる。よってこのとき、$(x_i{}^*)$ を (x_i) に双対な V^* の基、略して**双対基**と呼ぶ。$\dim V = \infty$ ならば V^* のなかには $(x_i{}^*)$ から生成されない元がある。

$x \in V$ と $\xi \in V^*$ に対し $\xi(x)$ をしばしば $\langle\,\xi\,,\,x\,\rangle$ と書く。$\langle\,\xi\,,\,x\,\rangle$ において、x を固定して ξ の関数と考えると、これは ξ に線形に依存するから、V^{**} の元 x^{**} が定義される：$\langle\,x^{**}\,,\,\xi\,\rangle = \langle\,\xi\,,\,x\,\rangle\ (\xi \in V^*)$。

写像 $x \in V \mapsto x^{**} \in V^{**}$ は線形で単射である ($x \neq 0$ ならば $\langle\,x^{**}\,,\,\xi\,\rangle = \langle\,\xi\,,\,x\,\rangle = 1$ なる $\xi \in V^*$ が存在す

るから、$x^{**} \neq 0$)。よって以下では、$x \in V$ と $x^{**} \in V^{**}$ を同一視し、$V \subset V^{**}$ と考える。$\dim V < \infty$ ならば $V = V^{**}$, $\dim V = \infty$ ならば $V \subsetneq V^{**}$ である。

次に $f \in \mathrm{L}(V, W)$ に対し、$f^* \in \mathrm{L}(W^*, V^*)$ を $f^*(\eta) = \eta \circ f$ $(\eta \in W^*)$ により定義すると $\langle \eta, f(x) \rangle = \langle f^*(\eta), x \rangle$ $(x \in V, \eta \in W^*)$ が成り立つ。f^* を f の**双対写像**と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f^*(\eta)"'] & & W \arrow[dl, "\eta"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

$f : V \to W$ を線形同型とする。V の任意の基 (x_i) に対して $y_i = f(x_i)$ で定められる元の集合 (y_i) は W の基である。このとき $f^*(y_i{}^*) = x_i{}^*$ が成り立つ。実際、$\langle f^*(y_i{}^*), x_j \rangle = \langle y_i{}^*, f(x_j) \rangle = \langle y_i{}^*, y_j \rangle = \delta_{ij} = \langle x_i{}^*, x_j \rangle$. これが基を構成するすべての元 x_j で成立しているから $f^*(y_i{}^*) = x_i{}^*$ である。

■**直交部分空間**　K-ベクトル空間 V をしばらく固定する。V の部分空間 P と V^* の部分空間 Φ に対して、$P^\perp = \{ \xi \in V^* \mid \langle \xi, x \rangle = 0 \ (\forall x \in P) \}$, $\Phi^\perp = \{ x \in V \mid \langle \xi, x \rangle = 0 \ (\forall \xi \in \Phi) \}$ を、それぞれ (V に関して) P, Φ に**直交する**部分空間と呼ぶ。P, Q を V の部分空間、Φ, Ψ を V^* の部分空間とすると、容易に分かるように

$$P = 0 \Rightarrow P^\perp = V^*, \quad \Phi = 0 \Rightarrow \Phi^\perp = V,$$
$$P \subset Q \Rightarrow Q^\perp \subset P^\perp, \quad \Phi \subset \Psi \Rightarrow \Psi^\perp \subset \Phi^\perp,$$
$$P \subset P^{\perp\perp}, \quad \Phi \subset \Phi^{\perp\perp}$$

が成り立つ。ここから

$$P^\perp = P^{\perp\perp\perp}, \quad \Phi^\perp = \Phi^{\perp\perp\perp}$$

が導かれる。実は V の部分空間 P に対しては

$$P = P^{\perp\perp}$$

である。実際、$x \notin P$ ならば $\langle \xi, x \rangle = 1$, $\langle \xi, y \rangle = 0$ $(\forall y \in P)$ なる $\xi \in V^*$ が存在するから、$x \notin P^{\perp\perp}$ である。

V^* の部分空間 Φ に対しては $\Phi \subsetneq \Phi^{\perp\perp}$ となることがある。

練習問題 1.1. (これは解かなくてよい。) V^* の部分空間 Φ が有限次元ならば $\Phi = \Phi^{\perp\perp}$ が成り立つことを示せ。$\Phi \subsetneq \Phi^{\perp\perp}$ となる例を挙げよ (Φ は無限次元になる)。

練習問題 1.2. 線形写像 $f : V \to W$ と、その双対写像 $f^* : W^* \to V^*$ に対して

$$\mathrm{Ker}\, f = (\mathrm{Img}\, f^*)^\perp, \quad (\mathrm{Ker}\, f)^\perp = \mathrm{Img}\, f^*,$$
$$\mathrm{Ker}\, f^* = (\mathrm{Img}\, f)^\perp, \quad (\mathrm{Ker}\, f^*)^\perp = \mathrm{Img}\, f$$

の成り立つことを示せ。(ヒント：$(\mathrm{Ker}\, f)^\perp \subset \mathrm{Img}\, f^*$ が問題。最初に $\mathrm{Ker}\, f = 0$ と仮定して証明。一般は商空間 $V/\mathrm{Ker}\, f$ をとって考える。)

練習問題 1.2 の結果を使うと、次は明らかである。

命題 1.1.
1. f が単射であることと、f^* が全射であることは同値である。
2. f が全射であることと、f^* が単射であることは同値である。

■**双一次形式**　$\mathrm{L}(V_1, V_2; K) \simeq \mathrm{L}(V_1, V_2{}^*)$ の元を $V_1 \times V_2$ 上の**双一次形式**と呼ぶ。双一次形式 $f \in \mathrm{L}(V_1, V_2; K)$ に対し、双一次形式 ${}^t f \in \mathrm{L}(V_2, V_1; K)$ を ${}^t f(x_2, x_1) = f(x_1, x_2)$ で定義する。${}^t f$ は f の**転置**と呼ばれる。$f \in \mathrm{L}(V_1, V_2{}^*)$, ${}^t f \in \mathrm{L}(V_2, V_1{}^*)$ と見るとき、${}^t f = f^*|_{V_2}$ である。$\dim V_2 < \infty$ ならば ${}^t f = f^*$ である。

$f \in \mathrm{L}(V_1, V_2; K)$ は

1. すべての $x_2 \in V_2$ に対し $f(x_1, x_2) = 0$ ならば $x_1 = 0$ である。
2. すべての $x_1 \in V_1$ に対し $f(x_1, x_2) = 0$ ならば $x_2 = 0$ である

の二つの条件を満たすとき、**非退化**であるという。

第一の条件は $f \in \mathrm{L}(V_1, V_2{}^*)$ が単射であることを、第二の条件は ${}^t f = f^*|_{V_2} \in \mathrm{L}(V_2, V_1{}^*)$ が単射であることを意味する。

とくに $\dim V_1 = \dim V_2 (= \dim V_2{}^*) < \infty$ の場合を考える。$f \in \mathrm{L}(V_1, V_2{}^*)$ が単射なることと f が全射なること (${}^t f = f^*$ が単射) とは同値であるから、f が非退化であるためには、上の二つの条件のうちの一つだけで十分である。f が非退化ならば $f : V_1 \to V_2{}^*$ は双射 (線形同型) だから逆写像 $f^{-1} : V_2{}^* \to V_1 (\simeq V_1{}^{**})$ が存在する。f^{-1} は $V_2{}^* \times V_1{}^*$ 上の非退化双一次形式と見ることができる。$x \in V_1, y \in V_2$ に対して $\xi = f(x) \in V_2{}^*$, $\eta = {}^t f(y) \in V_1{}^*$ とおくと、$f^{-1}(\xi, \eta) = \langle f^{-1}\xi, \eta \rangle = \langle x, \eta \rangle = \langle \eta, x \rangle = \langle {}^t f(y), x \rangle = {}^t f(y, x) = f(x, y)$. すなわち

$$f^{-1}(\xi, \eta) = f(x, y)$$

が成り立つ。

■**対称・反対称・交代双一次形式**　$f \in \mathrm{L}(V^2; K) (\simeq \mathrm{L}(V, V^*))$ とする。f は $f = {}^t f$ のとき**対称 (symmetric)**、$f = -{}^t f$ のとき**反対称 (antisymmetric)** と呼ばれる。すなわち任意の $x, y \in V$ に対して $f(x, y) = f(y, x)$ のときに対称、$f(x, y) = -f(y, x)$ のときに反対称である。また任意の $x \in V$ に対して $f(x, x) = 0$ のときは f は**交代 (alternating)** と呼ばれる。交代双一次形式は反対称である。K の標数 $\neq 2$ ならば逆に反対称形式は交代形式になる。

命題 1.2. K の標数は $\neq 2$ とする。$f \in \mathrm{L}(V^2; K)$ は対称かつ交代 (反対称) ならば $f = 0$ である。

証明 仮定から ${}^t f = f = -f$, ゆえに $2f = 0$. したがって、$2 \neq 0$ は可逆元だから、$f = 0$。 □

例 1.1. K の標数が $= 2$ の場合は注意しなければならない。例えば $K = \mathbb{Z}_2$、V は K 上 2 次元、e_1, e_2 を V の基底とし、V の双一次形式 f を $f(e_1, e_1) = f(e_2, e_2) = 0, f(e_1, e_2) = f(e_2, e_1) = 1$ によって定義すると、f は対称かつ交代である。しかし $f \neq 0$ である。

例 1.2 (実ベクトル空間の計量). $K = \mathbb{R}$ の場合、$V \times V$ 上の非退化・対称双一次形式 $g \in \mathrm{L}(V^2; \mathbb{R}) \simeq \mathrm{L}(V, V^*)$ を V の**計量**と呼ぶ。$g \in \mathrm{L}(V, V^*)$ と考えるとき、g が V の計量であることは g が単射で、かつ $g = {}^t g$ であることに同値である。計量 g のついたベクトル空間 (V, g) を実計量ベクトル空間と呼ぶ。$(V, g), (V', g')$ を実計量ベクトル空間とする。線形写像 $f : V \to V'$ は $g(x, y) = g'(f(x), f(y))\ (x, y \in V)$ を満たすとき、**等長 (isometry)** であるという。等長線形写像 f は単射である。実際、$f(x) = 0$ ならば任意の $y \in V$ に対して $g(x, y) = g'(f(x), f(y)) = 0$ だから g の非退化性により $x = 0$ でなければならない。

(V, g) を実計量ベクトル空間とし、$n = \dim V < \infty$ と仮定する。このとき、線型代数学でよく知られてい

るように V の基 (e_i) で $g(e_i, e_j) = \varepsilon_i\delta_{ij}$ を満たすものが存在する。ここで ε_i は (s,t) を $s+t=n$ なる非負整数の組として $\varepsilon_i = 1$ $(1 \le i \le s)$, $\varepsilon_i = -1$ $(s+1 \le i \le s+t=n)$ で定められる数である。このような基 (e_i) を**正規直交基 (orthonormal basis)** と呼ぶ。(s,t) は正規直交基底 e に依らず、g だけで決まる数でこれを g の**符号数 (signature)** と呼ぶ。g は線形同型 $g : V \to V^*$ だからその逆写像 $g^{-1} : V^* \to V$ が存在し、g^{-1} を $V^* \times V^*$ 上の非退化双一次形式と見ることができる。$x, y \in V$ に対して $\xi = g(x)$, $\eta = g(y)$ とおくと $g^{-1}(\eta, \xi) = g(x,y) = g(y,x) = g^{-1}(\xi, \eta)$ が成り立つから g^{-1} は対称で、V^* の計量である。これを **g が引き起こす V^* 上の計量**と呼ぶ。(e_i) を V の正規直交基底とすると、$g(e_i) = \varepsilon_i e_i{}^*$ の関係がある。$(e_i{}^*)$ は V^* の正規直交基底で、V^* の符号数は V と同じ (s,t) である。

■直積と直和　$\{ V_i \}_{i\in I}$ を K ベクトル空間の族とする。集合としての直積 $\prod_{i\in I} V_i = \{ (x_i) \mid x_i \in V_i \}$ は加法とスカラー乗法を $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$, $a(x_i) = (ax_i)$ と定義することで、K ベクトル空間になる。これを K ベクトル空間の族 $\{ V_i \}_{i\in I}$ の**直積**と呼ぶ。各 $j \in I$ に対して、写像 $\pi_j : \prod_{i\in I} V_i \to V_j$ を $\pi_j((x_i)) = x_j$ により定義すると、π_j は全射線形になる。これを自然な全射と呼ぶ。

$\oplus_{i\in I} V_i = \{ (x_i) \mid x_i \in V_i, x_i \neq 0$ となる i は有限個 $\}$ を K ベクトル空間の族 $\{ V_i \}_{i\in I}$ の**直和**と呼ぶ。直和 $\oplus_{i\in I} V_i$ は直積 $\prod_{i\in I} V_i$ の部分空間であるが、$V_i \neq 0$ となる i が有限個しかないときには、直積に一致する。各 $j \in I$ に対して、写像 $\varepsilon_j : V_j \to \oplus_{i\in I} V_i$ を次の式により定義する：$\varepsilon_j(x) = (x_i)$, ここで $x_i = x$ $(i = j)$, $x_i = 0$ $(i \neq j)$ である。ε_j は K-線形な単射である。これを自然な単射と呼ぶ。

直積と直和はそれぞれ次に述べる普遍写像性質で特徴づけられる。証明は簡単だから読者に委ねる。

命題 1.3 (直積の普遍写像性質). 任意の K-ベクトル空間 W と K-線形写像 $f_j : W \to V_j$ $(j \in I)$ の族 (f_j) に対して、$f_j = \pi_j \circ f$ $(j \in I)$ を満たす K-線形写像 $f : W \to \prod_{i\in I} V_i$ が唯一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} W \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "f_j"] & \\ \prod_{i\in I} V_i \arrow[r, "\pi_j"'] & V_j \end{tikzcd} \qquad (j \in I)$$

命題 1.4 (直和の普遍写像性質). 任意の K-ベクトル空間 W と K-線形写像 $f_j : V_j \to W$ $(j \in I)$ の族 (f_j) に対して、$f_j = f \circ \varepsilon_j$ $(j \in I)$ となる K-線形写像 $f : \oplus_{i\in I} V_i \to W$ が唯一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} V_j \arrow[r, "\varepsilon_j"] \arrow[dr, "f_j"'] & \oplus_{i\in I} V_i \arrow[d, "f"] \\ & W \end{tikzcd} \qquad (j \in I)$$

系 1.5. $\{ V_i \}_{i\in I}$, $\{ W_j \}_{j\in J}$ を K-ベクトル空間の族とする。$f \in \mathrm{L}(\oplus_{i\in I} V_i\, , \prod_{j\in J} W_j)$ に $(\pi_j \circ f \circ \varepsilon_i)_{(i,j)} \in \prod_{(i,j)\in I\times J} \mathrm{L}(V_i\, , W_j)$ を対応させる写像 $\mathrm{L}(\oplus_{i\in I} V_i\, , \prod_{j\in J} W_j) \to \prod_{(i,j)\in I\times J} \mathrm{L}(V_i\, , W_j)$ は線形同型である。

とくに $\xi \in \mathrm{L}(\oplus_{i\in I} V_i\, , K)$ に $(\xi \circ \varepsilon_i) \in \prod_{i\in I} \mathrm{L}(V_i\, , K)$ を対応させる写像 $\mathrm{L}(\oplus_{i\in I} V_i\, , K) \to (\xi \circ \varepsilon_i) \in \prod_{i\in I} \mathrm{L}(V_i\, , K)$ は線形同型である。すなわち、$(\oplus_{i\in I} V_i)^* \simeq \prod_{i\in I} (V_i)^*$。

系 1.6. $\{ V_i \}_{i\in I}, \{ W_i \}_{i\in I}$ を同じ添字集合をもつ K-ベクトル空間の族とし、(f_j) を線形写像 $f_j : V_j \to W_j$ $(j \in I)$ の族とする。このとき $f((x_i)) = (f_i(x_i))$ となる K-線形写像 $f : \oplus_i V_i \to \oplus_i W_i$ が唯一つある。

2 ベクトル空間のテンソル積

2.1 テンソル積

■自由ベクトル空間 I を集合とする。関数 $x : I \to K$ に対して I の部分集合 $\{ i \in I \mid x(i) \neq 0 \}$ を x の**台**と呼ぶ。台が有限である関数全体がつくる K 上のベクトル空間を $F_K(I)$ と書いて、これを集合 I を基底とする (K 上の) **自由ベクトル空間**と呼ぶ。

例 2.1. K^n は集合 $\{ 1, \cdots, n \}$ を基底とする自由ベクトル空間である。全行列環 $\mathrm{M}(n, K)$ はベクトル空間としては、集合 $\{ (i, j) \mid 1 \leq i, j \leq n \}$ を基底とする自由ベクトル空間である。一変数多項式環 $K[t]$ はベクトル空間としては、単項式の集合 $\{ t^0, t^1, t^2, \cdots \}$ を基底とする自由ベクトル空間である。

$F_K(I)$ において I を $F_K(I)$ の基底と呼ぶ理由はこうである：$i \in I$ に対して関数 $e_i : I \to K$ を $e_i(j) = \delta_{ij}$ により定義すれば $e_i \in F_K(I)$ で、$\{ e_i \mid i \in I \}$ は $F_K(I)$ の基底をつくる。写像 $e : i \in I \mapsto e_i \in F_K(I)$ は単射だから i と e_i を同一視することにより、I そのものを $F_K(I)$ の基底と思うことができる。

練習問題 2.1. K_i を K の写し ($K_i = K$) とすると、$F_K(I) \simeq \oplus_{i \in I} K_i$ である。このことを確認せよ。

■テンソル積の定義 V, W を K 上のベクトル空間とする。

直積 $V \times W$ を基底とする K 上の自由ベクトル空間 $F_K(V \times W)$ を考え、D を次のかたちの元から生成される $F_K(V \times W)$ の部分空間とする：

$$\begin{aligned}
&(ax_1 + x_2, y) - a(x_1, y) - (x_2, y), \\
&(x, ay_1 + y_2) - a(x, y_1) - (x, y_2), \\
&\quad (x, x_i \in V, \quad y, y_i \in W, \quad a \in K)
\end{aligned}$$

$F_K(V \times W)$ を D で割った商空間 $F_K(V \times W)/D$ を $V \otimes_K W$ または $V \otimes W$ と書いて、V と W の (K 上の) **テンソル積**と呼ぶ。商写像 $\pi : F \to V \otimes_K W$ ($= F_K(V \times W)/D$) を自然な全射と呼ぶ。$x \in V, y \in W$ に対し $\pi(x, y)$ を $x \otimes_K y$ または $x \otimes y$ と書く。これも x と y のテンソル積と呼ばれる。

■テンソル積の性質 テンソル積の定義から以下のことが直ちに導かれる。

命題 2.1.

1. 写像 $\otimes : V \times W \to V \otimes W$, $(x, y) \mapsto x \otimes y$ は双線形である。
2. $x \otimes y$ ($x \in V, y \in W$) のかたちの $V \otimes W$ の元を**純テンソル (pure tensor)** と呼ぶと、$V \otimes W$ の任意の元 x は純テンソルの和 $x = x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_n \otimes y_n$ ($x_i \in V, y_i \in W$) のかたちに表すことができる。
   ここで n は 0 以上の整数である。x に対し n の最小値が定まる。これを x の**長さ**または**階数**と呼ぶ (階数と呼ぶ理由は後述する)。
3. n を $x \in V \otimes W$ の長さとし、$x = x_1 \otimes y_1 + \cdots + x_n \otimes y_n$ とする。このとき $\{ x_1, \ldots x_n \}, \{ y_1, \ldots, y_n \}$ は各々線形独立である。

ベクトル空間 V と W のテンソル積は次に述べる性質で特徴づけられる。

命題 2.2 (テンソル積の普遍写像性質). X を K 上の任意のベクトル空間とし、$f : V \times W \to X$ を双線形写像と

する。このとき $f = f' \circ \otimes$ となる (下図を可換にする) 線形写像 $f' : V \otimes W \to X$ が唯一つある。

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, "f"'] & V \otimes W \arrow[d, "f'"] \\ & X \end{tikzcd}$$

つまり対応

$$f' \in \mathrm{L}(V \otimes W, X) \mapsto f = f' \circ \otimes \in \mathrm{L}(V, W; X)$$

は双射 (線形同型) である。これを自然な同型と呼び、以下ではこの同型の意味で $\mathrm{L}(V \otimes W, X) \simeq \mathrm{L}(V, W; X)$ と考える。

証明 f は $F_K(V \times W)$ の基底 $V \times W$ からベクトル空間 X への写像だから、$f''((x, y)) = f(x, y)$ $(x \in V, y \in W)$ を満たす線形写像 $f'' : F_K(V \times W) \to X$ が唯一つ存在する。線形写像 $f' : V \otimes W \to X$ に関して $f = f' \circ \otimes \iff f'' = f' \circ \pi$ が成り立っている。そこで $f'' = f' \circ \pi$ を満たす f' の存在と一意性を示せばいい。このうち、一意性のほうは π が全射ということから明らかだから、問題は f' の存在である。f の双線形性から

$$\begin{aligned} &f''((ax_1 + x_2, y) - a(x_1, y) - (x_2, y)) \\ &= f(ax_1 + x_2, y) - af(x_1, y) - f(x_2, y) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &f''((x, ay_1 + y_2) - a(x, y_1) - (x, y_2)) \\ &= f(x, ay_1 + y_2) - af(x, y_1) - f(x, y_2) = 0. \end{aligned}$$

である。すなわち、f'' は D 上で 0 だから $f'' = f' \circ \pi$ を満たす線形写像 $f' : V \otimes W \to X$ が well-defined である。 □

普遍写像性質を使えば、原則的にテンソル積のすべての性質を導き出すことができる。例えば以下の一連の線形同型は K-ベクトル空間のカテゴリーにおいてテンソル積演算が有する代数的性格を表すものであるが、これらすべてを普遍写像性質から導くことができる。

$U, V, W, \cdots$ をベクトル空間とする。

結合則 線形写像 $(U \otimes V) \otimes W \to U \otimes (V \otimes W)$, $(x \otimes y) \otimes z \mapsto x \otimes (y \otimes z)$ が唯一つ存在し、線形同型である：$(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W)$。

交換則 線形写像 $V \otimes W \to W \otimes V$, $x \otimes y \mapsto y \otimes x$ が唯一つ存在し、線形同型である：$V \otimes W \simeq W \otimes V$。

単位元としての K 線形写像 $K \otimes V \to V$, $a \otimes x \mapsto ax$ が唯一つ存在し、線形同型である。同様に線形写像 $V \otimes K \to V$, $x \otimes a \mapsto ax$ が唯一つ存在し、線形同型である：$K \otimes V \simeq V \otimes K \simeq V$。

直和との分配則 線形写像 $(V_1 \oplus V_2) \otimes W \to (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W)$, $(x_1, x_2) \otimes y \mapsto (x_1 \otimes y, x_2 \otimes y)$ が唯一つ存在し、線形同型である。同様に線形写像 $V \otimes (W_1 \oplus W_2) \to (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2)$, $x \otimes (y_1, y_2) \mapsto (x \otimes y_1, x \otimes y_2)$ が唯一つ存在し、線形同型である：$(V_1 \oplus V_2) \otimes W \simeq (V_1 \otimes W) \oplus (V_2 \otimes W)$, $V \otimes (W_1 \oplus W_2) \simeq (V \otimes W_1) \oplus (V \otimes W_2)$。一般に線形写像 $(\oplus_{i \in I} V_i) \otimes (\oplus_{j \in J} W_j) \to \oplus_{(i,j) \in I \times J}(V_i \otimes W_j)$, $(x_i)_{i \in I} \otimes (y_j)_{j \in J} \mapsto (x_i \otimes y_j)_{(i,j) \in I \times J}$ が唯一つ存在し、線形同型である：$(\oplus_{i \in I} V_i) \otimes (\oplus_{j \in J} W_j) \simeq \oplus_{(i,j) \in I \times J}(V_i \otimes W_j)$

以上に述べた線形同型はいずれも自然な同型と呼ばれる。

練習問題 2.2. 上に述べたことを普遍写像性質を用いて証明せよ。

命題 2.3. $(v_i)_{i\in I}, (w_j)_{j\in J}$ をそれぞれ V, W の基底とすると、$(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ は $V\otimes W$ の基底である。ゆえに $\dim(V\otimes W) = \dim V\cdot \dim W$ が成り立つ。

証明 $(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ が $V\otimes W$ を生成することは明らかだから、これらの一次独立性を示す：各 $(i,j)\in I\times J$ に対して一次形式 $f_{i,j} : V\otimes W \to K$ を $f_{i,j}(x\otimes y) = v_i^*(x)w_j^*(y)$ により定義する。ここで一次形式 $v_i^* : V\to K$, $w_j^* : W\to K$ はそれぞれ $v_i^*(v_k) = \delta_{ik}, w_j^*(w_l) = \delta_{jl}$ により定義されている。さて $\sum_{k,l} a_{k,l} v_k\otimes w_l = 0$ $(a_{k,l}\in K)$ とすると、両辺に $f_{i,j}$ を作用させて $a_{i,j} = 0$ を得る。すなわち、$(v_i \otimes w_j)_{(i,j)\in I\times J}$ は一次独立である。 □

練習問題 2.3. $x_i\in V, y_i\in W$ $(i = 1,\cdots,n)$ とし、 $x_1,\cdots,x_n$ は一次独立と仮定する。このとき $x_1\otimes y_1+\cdots+x_n\otimes y_n = 0$ ならば $y_1=\cdots=y_n=0$ である。このことを証明せよ。

練習問題 2.4. $f_i\in \mathrm{L}(V_1, W_1), z_i\in W_2$ $(i=1,\cdots,n)$ とし、$f_1,\cdots,f_n$ は一次独立であると仮定する。このときすべての $x\in V$ に対して $f_1(x)\otimes z_1+\cdots+f_n(x)\otimes z_n = 0$ ならば $z_1=\cdots=z_n=0$ である。このことを証明せよ。

例 2.2. $e_1, e_2,\cdots$ を K^n の標準基底とする。次の線形同型がある：

$$K^m\otimes K^n \simeq K^{mn},\quad e_i\otimes e_k \mapsto e_{n(i-1)+k}\quad (i=1\cdots m, k=1\cdots n)$$

これは $K^m\otimes K^n$ の基底 $e_i\otimes e_k$ を添字に関して辞書式順序に並べたものを $e_1,\cdots,e_{mn}$ と対応づける写像である。任意の $x=(x_1,\cdots,x_m)\in K^m, y=(y_1,\cdots,y_n)\in K^n$ に対して $x\otimes y$ に対応する K^{mn} の元は

$$\begin{aligned}&(x_1y_1,\cdots,x_1y_n,x_2y_1,\cdots,x_2y_n,\cdots\cdots,x_my_1,\cdots,x_my_n)\\&=(x_1y,\cdots,x_my)\end{aligned}$$

である。この元を $x\otimes y$ と書くことがある。

例 2.3. V_1, W_1 をそれぞれ V, W の部分空間とする。$V_1\otimes W_1\subset V\otimes W$ の関係は自明なことと思われるが、これを敢えて証明してみよう。$x\in V_1, y\in W_1$ とする。x と y の $V_1\otimes W_1$ の中でのテンソル積を暫く $x\otimes' y$ と書いて $V\otimes W$ の中でのテンソル積 $x\otimes y$ と区別しよう。このとき、自明な双一次写像 $f : V_1\times W_1\to V\otimes W$, $f(x,y)\mapsto x\otimes y$ があるから、線形写像 $f' : V_1\otimes W_1\to V\otimes W$, $f'(x\otimes' y) = x\otimes y$ を定義することができる (普遍写像性質)。f' は単射である。実際、$V_1\otimes W_1$ の任意の元 z は $x_1\otimes' y_1+\cdots+x_n\otimes' y_n$ の形に書ける。ここで n は z の長さで、ゆえに $(x_i), (y_i)$ はそれぞれ一次独立である (命題 2.1 を参照)。さて $f'(x_1\otimes' y_1+\cdots+x_n\otimes' y_n) = x_1\otimes y_1+\cdots+x_n\otimes y_n = 0$ ならば、(x_i) は一次独立だから練習問題 2.3 の結果から、$y_i = 0$ でなければならない。すなわち $x_1\otimes' y_1+\cdots+x_n\otimes' y_n = 0$ となって、f' は単射である。よって $V\otimes W$ の部分空間 $\{\sum_i x_i\otimes y_i \mid x_i\in V_1, y_i\in W_1\}$ を $V_1\otimes W_1$ と思ってよく、$x\otimes' y$ と $x\otimes y$ を区別する必要はない。

練習問題 2.5. V_1 を V の部分空間とする。このとき例 2.3 で述べたように $V_1\otimes W$ は $V\otimes W$ の部分空間である。$\pi_1 : V\to V/V_1, \pi : V\otimes W\to V\otimes W\,/\,V_1\otimes W$ を自然な全射とし、$\pi_1(x) = \bar{x}, \pi(z) = \bar{z}$ と書く。このとき任意の $x\in V, y\in W$ に対して $\bar{x}\otimes y$ を $\overline{x\otimes y}$ に写す線形写像 $\varphi : (V/V_1)\otimes W\to V\otimes W\,/\,V_1\otimes W$ が唯一つ存在し、φ は線形同型である。このことを確かめよ。つまり

$$(V\,/\,V_1)\otimes W \simeq V\otimes W\,/\,V_1\otimes W,\quad \bar{x}\otimes y\mapsto \overline{x\otimes y}\quad (x\in V, y\in W)$$

が成り立つ。

■多重テンソル積 $p(\geq 3)$ 個のベクトル空間 $V_1,\ldots,V_p$ とそれぞれの元 $x_1,\ldots,x_p$ に対して、それらのテンソル積 $V_1\otimes\cdots\otimes V_p$、$x_1\otimes\cdots\otimes x_p$ を帰納的に定義する：$V_1\otimes\cdots\otimes V_p = (V_1\otimes\cdots\otimes V_{p-1})\otimes V_p$,

$x_1 \otimes \cdots \otimes x_p = (x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p-1}) \otimes x_p$.

$V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ についても次の普遍写像性質が当然成り立つ。

命題 2.4 (多重テンソル積の普遍写像性質). 写像 $\otimes : V_1 \times \cdots \times V_p \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$, $(x_1, \cdots, x_p) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ は多重線形写像である。しかも任意のベクトル空間 X と多重線形写像 $f : V_1 \times \cdots \times V_p \to X$ に対して $f = f' \circ \otimes$ となる (下図を可換にする) 線形写像 $f' : V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \to X$ が唯一つ存在する。つまり $f' \in \mathrm{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p, X) \mapsto f = f' \circ \otimes \in \mathrm{L}(V_1, \cdots, V_p; X)$ は双射 (線形同型) である。

$$\begin{tikzcd}
V_1 \times \cdots \times V_p \arrow[r, "\otimes"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \arrow[d, "f'"] \\
& X
\end{tikzcd}$$

これをやはり自然な同型と呼び、以下ではこの同型の意味で $\mathrm{L}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p, X) \simeq \mathrm{L}(V_1, \cdots, V_p; X)$ と考える。

練習問題 2.6. 線形写像 $(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p) \otimes (V_{p+1} \otimes \cdots \otimes V_{p+q}) \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_{p+q}$, $(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}$ が唯一つ存在し、線形同型である：$(V_1 \otimes \cdots \otimes V_p) \otimes (V_{p+1} \otimes \cdots \otimes V_{p+q}) \simeq V_1 \otimes \cdots \otimes V_{p+q}$. このことを証明せよ。これを自然な同型と呼ぶ。

練習問題 2.7. $x_1 \otimes \cdots \otimes x_p$ $(x_i \in V_i)$ の型の $V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ の元を**純テンソル**と呼ぶ。$V_1 \otimes \cdots \otimes V_p$ の任意の元は純テンソルの和のかたちに表すことができる。このことを証明せよ。

2.2 テンソル積と写像

■写像のテンソル積 $f \in \mathrm{L}(V_1, W_1)$, $g \in \mathrm{L}(V_2, W_2)$ に対し、$\varphi_{f,g} \in \mathrm{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ を $\varphi_{f,g}(x_1 \otimes x_2) = f(x_1) \otimes g(x_2)$ により定義する。$\varphi_{f,g}$ は f, g の各々に関して一次だから、線形写像 $\varphi : \mathrm{L}(V_1, W_1) \otimes \mathrm{L}(V_2, W_2) \to \mathrm{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$, $f \otimes g \mapsto \varphi_{f,g}$ が定義される。

命題 2.5. φ は単射である。

証明 $\varphi(f_1 \otimes g_1 + \cdots + f_n \otimes g_n) = 0$ ならば $f_1 \otimes g_1 + \cdots + f_n \otimes g_n = 0$ であることを示せばいい。$f_1, \cdots, f_n$ は一次独立であると仮定する。$\varphi(f_1 \otimes g_1 + \cdots + f_n \otimes g_n) = 0$ を $x \otimes y$ に作用させると、$f_1(x) \otimes g_1(y) + \cdots + f_n(x) \otimes g_n(y) = 0$. これが任意の $x \in V$ で成り立つから、練習問題 2.4 の結果を使って、$g_1(y) = \cdots = g_n(y) = 0$。さらにこれが任意の $y \in W$ で成り立つから、$g_1 = \cdots = g_n = 0$, すなわち $f_1 \otimes g_1 + \cdots + f_n \otimes g_n = 0$ である。 □

φ は単射だから、$f \otimes g$ と $\varphi_{f,g}$ を同一視することができる。すると

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = f(x) \otimes g(y) \quad (x \in V, y \in W).$$

練習問題 2.8. $f \in \mathrm{L}(V_1, W_1)$, $g \in \mathrm{L}(V_2, W_2)$ とする。$\mathrm{Ker}(f \otimes g) = (\mathrm{Ker} f) \otimes V_2 + V_1 \otimes (\mathrm{Ker} g)$ と $\mathrm{Img}(f \otimes g) = (\mathrm{Img} f) \otimes (\mathrm{Img} g)$ が成り立つことを示せ。

上の練習問題の結果から次のことが直ちに導かれる。

命題 2.6.
1. f と g が単射ならば $f \otimes g \in \mathrm{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ は単射である。
2. 逆に $V_1 \neq 0$, $V_2 \neq 0$ で、$f \otimes g$ が単射ならば f と g は単射である。

3. f と g が全射ならば $f \otimes g$ は全射である。
4. 逆に $W_1 \neq 0, W_2 \neq 0$ で、$f \otimes g$ が全射ならば f と g は全射である。

■有限階数の写像 上の「テンソル積と写像」でとくに $W_1 = V_2 = K$ の場合を考える。V_1, W_2 をそれぞれ V, W と書く。$\xi \in V^* \simeq \mathrm{L}(V, K), y \in W \simeq \mathrm{L}(K, W)$ に対して $\varphi_{\xi,y} \in \mathrm{L}(V, W) \simeq \mathrm{L}(V \otimes K, K \otimes W)$ は

$$\varphi_{\xi,y}(x) = \varphi_{\xi,y}(x \otimes 1) = \xi(x) \otimes y(1) = \xi(x)y = \langle \xi, x \rangle y$$

で定義される線形写像である。

一部、命題 2.5 の証明のくり返しになるが、$\varphi : V^* \otimes W \to \mathrm{L}(V, W), \xi \otimes y \mapsto \varphi_{\xi,y}$ が単射であることを、示しておこう：$\varphi(\xi_1 \otimes y_1 + \cdots + \xi_n \otimes y_n) = \varphi_{\xi_1,y_1} + \cdots + \varphi_{\xi_n,y_n} = 0$ とする。ここで $\xi_i \in V^*, y_i \in W, y_1 \cdots y_n$ は一次独立とする。すると任意の $x \in V$ に対して $\xi_1(x)y_1 + \cdots + \xi_n(x)y_n = 0$ となる。$y_1 \cdots y_n$ は一次独立だから、$\xi_1(x) = \cdots = \xi_n(x) = 0, x$ は任意だから $\xi_1 = \cdots = \xi_n = 0$、ゆえに $\xi_1 \otimes y_1 + \cdots + \xi_n \otimes y_n = 0$ となる。したがって、φ は単射である。

$\xi \otimes y$ と $\varphi_{\xi,y}$ を同一視し、$V^* \otimes W$ を $\mathrm{L}(V, W)$ の部分空間と見なしたときに、

$$(\xi \otimes y)(x) = \langle \xi, x \rangle y \quad (x \in V)$$

が成り立っている。

命題 2.7. $V^* \otimes W \subset \mathrm{L}(V, W)$ と見なしたとき、$V^* \otimes W$ の元は $\mathrm{L}(V, W)$ における有限階数の写像として特徴づけられる。ここで $f \in \mathrm{L}(V, W)$ の**階数 (rank)** は $\mathrm{rank} f$ と書かれ、W の部分空間 $\mathrm{Img}\, f = \{f(x) \mid x \in V\}$ の次元である。有限階数とはこの次元が有限なることを意味する。命題 2.1 において定義した $f = \xi_1 \otimes y_1 + \cdots \xi_n \otimes y_n$ の "長さ" は写像 f の階数に等しい。

証明 $f \in V^* \otimes W$ ならば、$f = \xi_1 \otimes y_1 + \cdots + \xi_n \otimes y_n$ のかたちに書ける。n を f のテンソルの長さ (これを取り敢えず $\mathrm{rank}' f$ と書く) とする。
このとき、$x \in V$ に対して $f(x) = \langle \xi_1, x \rangle y_1 + \cdots + \langle \xi_n, x \rangle y_n$. ゆえに $\mathrm{rank} f \leq n = \mathrm{rank}' f < \infty$ である。
逆に $f \in \mathrm{L}(V, W)$ は $\mathrm{rank} f = n < \infty$ と仮定すると、一次独立な $y_1, \cdots, y_n \in W$ があって、任意の $x \in V$ に対して $f(x) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$, ここで $x_i \in K$ は x に応じて一意に決まるから、$\xi_1, \cdots, \xi_n \in V^*$ があって、$x_i = \langle \xi_i, x \rangle \ (i = 1, \cdots, n)$ となる。すなわち $f = \xi_1 \otimes y_1 + \cdots + \xi_n \otimes y_n$ が成り立ち、$f \in V^* \otimes W$ である。そして $\mathrm{rank}' f \leq n = \mathrm{rank} f$ が成り立つ。$\mathrm{rank} f \leq \mathrm{rank}' f$ と併せて、$\mathrm{rank}' f = \mathrm{rank} f$ を得る。 □

系 2.8. $\dim V < \infty$ または $\dim W < \infty$ ならば $V^* \otimes W \simeq \mathrm{L}(V, W)$ である。

付記 $\dim V = \dim W = \infty$ のときには $\mathrm{L}(V, W)$ の中に階数が無限のものがあるから $V^* \otimes W \neq \mathrm{L}(V, W)$ である。

命題 2.9. 次の (a), (b), (c) の何れかの場合に、自然な単射 $\varphi : \mathrm{L}(V_1, W_1) \otimes \mathrm{L}(V_2, W_2) \to \mathrm{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ は同型になる：(a) V_1, W_1 が有限次元, (b) V_2, W_2 が有限次元, (c) V_1, V_2 が有限次元。

証明 φ が単射なることは既に示してあるから、これが全射なることを示せば十分である。
(a) の場合：$e_1, \cdots, e_p, \bar{e}_1, \cdots, \bar{e}_q$ をそれぞれ V_1, W_1 の基底とする。任意の $f \in \mathrm{L}(V_1 \otimes V_2, W_1 \otimes W_2)$ に対して pq 個の写像 $f_{ij} \in \mathrm{L}(V_2, W_2)\ (i = 1 \cdots p, j = 1 \cdots q)$ を

$$f(e_i \otimes x) = \textstyle\sum_{j=1}^{q} \bar{e}_j \otimes f_{ij}(x) \quad (1 \leq i \leq p)$$

により定義する。$\varepsilon_{ij} : V_1 \to W_1$ を $\varepsilon_{ij} = e_i{}^* \otimes \bar{e}_j$, i.e. $\varepsilon_{ij}(e_k) = \delta_{ik}\bar{e}_j$ とする。このとき、容易に確かめられるように $f = \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \otimes f_{ij}$ となっている。ゆえに φ は全射である。
(b) の場合も同様である。
(c) の場合は既に得た関係

$$V_1{}^* \otimes W_1 \simeq \mathrm{L}(\, V_1 \,,\, W_1 \,),$$
$$V_2{}^* \otimes W_2 \simeq \mathrm{L}(\, V_2 \,,\, W_2 \,),$$
$$V_1{}^* \otimes V_2{}^* \otimes W_1 \otimes W_2 \simeq \mathrm{L}(\, V_1 \otimes V_2 \,,\, W_1 \otimes W_2 \,)$$

から明らかであろう。 □

■多重テンソル積と多重線形写像　線形写像

$$\varphi : V_1{}^* \otimes \cdots \otimes V_p{}^* \to \mathrm{L}(\, V_1, \cdots, V_p \,;\, K \,) \simeq (V_1 \otimes \cdots \otimes V_p)^*$$
$$\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p \mapsto \varphi_{\xi_1 \ldots \xi_p}$$

を考える。ここで $\varphi_{\xi_1 \ldots \xi_p}$ は

$$\varphi_{\xi_1 \cdots \xi_p}(x_1, \cdots, x_p) = \varphi_{\xi_1 \cdots \xi_p}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \xi_1(x_1) \cdots \xi_p(x_p)$$

で定義されている。

命題 2.10. φ は単射である。しかも $V_1, \cdots, V_p$ の中の一つをのぞくすべてが有限次元ならば φ は双射である。

ゆえに φ を自然な単射 (双射のときは自然な同型) と呼ぶ。

証明 証明は p に関する帰納法による。$p = 1$ の場合は自明である。$p > 1$ とし、$p - 1$ までは命題は成立しているとする。すなわち $\psi : V_2 \otimes \cdots \otimes V_p \to \mathrm{L}(\, V_2, \cdots, V_p \,;\, K \,)$ をその "自然な単射" とする。
次の自然な写像の合成

$$V_1{}^* \otimes \cdots \otimes V_p{}^* \simeq V_1{}^* \otimes (V_2{}^* \otimes \cdots \otimes V_p{}^*)$$
$$\hookrightarrow_\alpha \mathrm{L}(\, V_1 \,,\, V_2{}^* \otimes \cdots \otimes V_p{}^*)\,)$$
$$\hookrightarrow_\beta \mathrm{L}(\, V_1 \,,\, \mathrm{L}(\, V_2, \cdots, V_p \,;\, K \,)\,) \simeq \mathrm{L}(\, V_1, \cdots, V_p \,;\, K \,)$$

を考える。ここで α は

$$\alpha(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p) = \alpha_{\xi_1,\, \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p}, \quad \alpha_{\xi_1,\, \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p}(x_1) = \langle\, \xi_1 \,,\, x_1 \,\rangle \xi_2 \otimes \cdots \otimes \xi_p$$

により定義される線形写像で、既に証明されたように単射である。$\dim V_1 < \infty$ または $\dim V_2, \cdots, \dim V_p < \infty$ ならば α は双射である。
β は $\beta(f) = \psi \circ f$ で定義される写像である。帰納法の仮定から ψ は単射だから、β も単射である。さらに $V_2, \cdots, V_p$ のなかの一つを除くすべてが有限次元ならば ψ は双射で、このときは β も双射となる。
$\varphi' = \beta \circ \alpha$ とおくと、容易に確認できるように $\varphi = \varphi'$ が成り立つ (詳細は読者に委ねる)。したがって φ について命題の主張が成り立つ。 □

練習問題 2.9. 自然な単射

$$V_1{}^* \otimes \cdots \otimes V_p{}^* \otimes W$$
$$\to (V_1 \otimes \cdots \otimes V_p)^* \otimes W$$
$$\to \mathrm{L}(\, V_1 \otimes \cdots \otimes V_p \,,\, W \,)$$

を考える。$V_1, \ldots, V_p, W$ のうちの一つをのぞくすべてが有限次元ならば双射である。

2.3 テンソル積の応用〜係数拡大〜

■**定義**　V を K 上のベクトル空間、L を K の拡大体とする。L は自然に K 上のベクトル空間と考えることができ、L と V の K 上のテンソル積 $L \otimes_K V$ をとることができる。

ここで各 $a \in L$ に対し、K-線形変換 $\varphi_a : L \otimes_K V \to L \otimes_K V$ を

$$\varphi_a(b \otimes x) = ab \otimes x \quad (b \in L, x \in V)$$

により定義する。明らかに写像 $(a, z) \in L \times (L \otimes_K V) \mapsto \varphi_a(z) \in L \otimes_K V$ は $L \otimes_K V$ 上に L-ベクトル空間の構造を定義する。この L-ベクトル空間の構造はもとの K-ベクトル空間の構造と両立している。すなわち $a \in K \subset L$ に対しては $\varphi_a(z) = az$ $(z \in L \otimes_K V)$ が成り立つ。そこで以下、$a \in L, z \in L \otimes_K V$ に対し $\varphi_a(z)$ を az と書くことにする。

L-ベクトル空間 $L \otimes_K V$ を V の L への**係数拡大**と略称する。K-線形な単射 $\tau : V \to L \otimes_K V, \tau(x) = 1 \otimes x$ を自然な単射と呼ぶ。

$L \otimes_K V$ は V^L とも書かれる。

練習問題 2.10. $\{ e_i \}_I$ を V の K 上の基底とすると、$\{ 1 \otimes e_i \}_I$ は $L \otimes_K V$ の L 上の基底である。このことを示せ。(したがって $L \otimes_K V$ の L 上の次元は V の K 上の次元に等しい。)

例 2.4. V を実ベクトル空間とする。$V^{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$ は V の**複素化**とも呼ばれる。V が $\mathbb{R}$ 上 n 次元ならば、$V^{\mathbb{C}}$ は $\mathbb{R}$ 上で $2n$ 次元、$\mathbb{C}$ 上では n 次元である。

例 2.5. V を K-ベクトル空間、W を V の K-部分空間とする。このとき $L \otimes_K W$ は $L \otimes_K V$ の K-部分空間である (例 2.3)。しかし、$L \otimes_K W$ は L-ベクトル空間 $L \otimes_K V$ における L の作用で閉じており、L-部分空間になっている。

また、練習問題 2.5 で述べた K-ベクトル空間の線形同型

$$L \otimes_K (V / W) \simeq L \otimes_K V / L \otimes_K W, \quad a \otimes \bar{x} \mapsto \overline{a \otimes x}$$

は L-線形同型でもある。つまり

$$(V / W)^L \simeq V^L / W^L, \quad 1 \otimes \bar{x} \mapsto \overline{1 \otimes x} \quad (x \in V)$$

が成り立つ。

■係数拡大に伴う写像の延長

命題 2.11. Φ を任意の L-ベクトル空間、$f : V \to \Phi$ を K-線形写像とする。このとき、

1. L-線形写像 $f' : V^L \to \Phi$ で、$f = f' \circ \tau$, すなわち

   $$f'(1 \otimes x) = f(x) \quad (x \in V)$$

   を満たすものが唯一つ存在する。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "f"'] & V^L \arrow[d, "f'"] \\ & \Phi \end{tikzcd}$$

2. 写像 $f \in \mathrm{L}_K(V, \Phi) \mapsto f' \in \mathrm{L}_L(V^L, \Phi)$ は K-線形同型である。

証明 任意の $b \in L, x \in V$ に対して $f'(b \otimes x) = bf(x)$ を満たす K-線形写像 f' が唯一つ存在することは、テンソル積の性質から明らかである。f' は L-線形でもある。実際、純テンソル $b \otimes x$ に対して

$$f'(a(b \otimes x)) = f'(ab \otimes x) = abf(x) = af'(b \otimes x)$$

であり、$L \otimes_K V$ の任意の元 z は純テンソルの有限和だからやはり $f'(az) = af'(z)$ が成り立つ。
定理の後半も明らか。 □

この f' を f の L-線形写像への**延長**と呼ぶ。

命題 2.12. $V_1, \cdots, V_p$ を K-ベクトル空間、Φ を L-ベクトル空間、$f : V_1 \times \cdots \times V_p \to \Phi$ を K-多重線形写像とする。このとき、

1. L-多重線形写像 $f' : {V_1}^L \times \cdots \times {V_p}^L \to \Phi$ で、

$$f'(1 \otimes x_1, \cdots, 1 \otimes x_p) = f(x_1, \cdots, x_p) \quad (x_i \in V_i)$$

を満たすものが唯一つ存在する。

2. $f \in \mathrm{L}_K(V_1, \cdots, V_p; \Phi) \mapsto f' \in \mathrm{L}_L({V_1}^L, \cdots, {V_2}^L; \Phi)$ は K-線形同型である。

証明 一意性は明らかである。存在の証明は p に関する帰納法による。
まず $p = 1$ のときは既に証明した。
次に $p > 1$ として、$p - 1$ までは定理の主張が正しいと仮定する。$f : V_1 \to \mathrm{L}_K(V_2, \cdots, V_p; \Phi)$ と考える。帰納法の仮定により、任意の $g \in \mathrm{L}_K(V_2, \cdots, V_p; \Phi)$ に対して $g' \in \mathrm{L}_L({V_2}^L, \cdots, {V_p}^L; \Phi)$ が決まって、$g'(1 \otimes x_2, \cdots, 1 \otimes x_p) = g(x_2, \cdots, x_p)$ を満たす。そして $\varphi : \mathrm{L}_K(V_2, \cdots, V_p; \Phi) \to \mathrm{L}_L({V_2}^L, \cdots, {V_p}^L; \Phi), g \mapsto g'$ は単射 K-線形である。
合成写像 $\varphi \circ f : V_1 \to \mathrm{L}_L({V_2}^L, \cdots, {V_p}^L; \Phi)$ の L-線形写像への延長を f' と書く。すなわち、f' は L-線形写像 $f' : {V_1}^L \to \mathrm{L}_L({V_2}^L, \cdots, {V_p}^L; \Phi)$ で $f'(1 \otimes x) = \varphi(f(x))$ $(x \in V_1)$ を満たす。すると

$$\begin{aligned} &f'(1 \otimes x, 1 \otimes x_2, \cdots, 1 \otimes x_p) = f'(1 \otimes x)(1 \otimes x_2, \cdots, 1 \otimes x_p) \\ &= \varphi(f(x))(1 \otimes x_2, \cdots, 1 \otimes x_p) = f(x)(x_2, \cdots, x_p) = f(x, x_2, \cdots, x_p) \end{aligned}$$

だから f' が求める写像である。 □

系 2.13. $V_1, \cdots, V_p, W$ を K-ベクトル空間、$f : V_1 \times \cdots \times V_p \to W$ を K-多重線形写像とする。このとき、

1. L-多重線形写像 $f^L : {V_1}^L \times \cdots \times {V_p}^L \to W^L$ で、

$$f^L(1 \otimes x_1, \cdots, 1 \otimes x_p) = 1 \otimes f(x_1, \cdots, x_p) \quad (x_i \in V_i)$$

を満たすものが唯一つ存在する。

2. $f \mapsto f^L$ は単射 K-線形である。

f^L をやはり f の L-多重線形写像への**延長**と呼ぶ。

とくに $p=1$ の場合を考えると、下図を可換にする f^L が唯一つ存在して、$f \mapsto f^L$ は単射 K-線形である。

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V^L \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f^L} \\ W & \xrightarrow[\theta]{} & W^L \end{array}$$

ただし図で τ, θ は $\tau(x) = 1 \otimes x, \theta(y) = 1 \otimes y$ である。

命題 2.14. $f : V \to W$ を K-線形写像とする。f の延長 $f^L : V^L \to W^L$ は次の条件を満たす関数 $f' : V^L \to W^L$ として特徴づけられる：任意の $x \in V$ に対して $f'(1 \otimes x) = 1 \otimes y$ $(y \in W)$ の形をとる。

証明 実際、y は x に応じて一意に決まるから関数 $f : V \to W, f(x) = y$ が定義される。f は K-線形で、明らかに $f' = f^L$ である。 □

練習問題 2.11. $f : V \times V \to K$ を双一次形式とし、$f^L : V^L \times V^L \to L$ を f の L-双一次形式への延長とする。このとき (a) f が対称ならば f^L も対称、(b) f が反対称ならば f^L も反対称、(c) f が交代ならば f^L も交代であることを示せ。

練習問題 2.12. V, W を K-ベクトル空間とする。任意の $x \in V, y \in W$ に対して $1 \otimes (x \otimes y)$ を $(1 \otimes x) \otimes (1 \otimes y)$ に写す L-線形写像 $\varphi : (V \otimes W)^L \to V^L \otimes W^L$ が唯一つ存在し、L-線形同型である。つまり

$$(V \otimes W)^L \simeq V^L \otimes W^L, \quad 1 \otimes (x \otimes y) \mapsto (1 \otimes x) \otimes (1 \otimes y) \quad (x \in V, y \in W)$$

このことを示せ。

3　次数付き代数の一般論

3.1　代数

■代数、逆代数　環や代数の理論の基本用語については読者は既知だと思うが、本書で使用する分を下に整理して書いておく。

K 上の**代数 (algebra)** とは K 上のベクトル空間 E にさらに**乗法**と呼ばれる双一次演算 $\mu : E \times E \to E$ の備わった構造をいう。$(x, y) \in E \times E$ に対し、$\mu(x, y)$ は一般に $x \cdot y$ または xy と書かれ、E における x と y の積と呼ばれる。$\mu \in \mathrm{L}(E, E; E) \simeq \mathrm{L}(E \otimes E, E)$ だから乗法 μ を線形演算 $\mu : E \otimes E \to E$ と考えることもできる。

なお、代数は多元環、線形環などとも称せられる。

代数 E は、任意の $x, y, z \in E$ に対して $(xy)z = x(yz)$ を満たすときに、**結合的**と言われ、$xy = yx$ を満たすときに、**可換**と言われる。

代数 E に対し、**逆代数 (opposite algebra)** E^{o} はシンボル x^{o} $(x \in E)$ から成る代数で、その演算は $x^{\mathrm{o}} + y^{\mathrm{o}} = (x + y)^{\mathrm{o}}, ax^{\mathrm{o}} = (ax)^{\mathrm{o}}, x^{\mathrm{o}}y^{\mathrm{o}} = (yx)^{\mathrm{o}}$ で定義される。E^{oo} で逆代数 E^{o} のそのまた逆代数を表す ($E^{\mathrm{oo}} = (E^{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}}$)。シンボル $(x^{\mathrm{o}})^{\mathrm{o}}$ を x^{oo} と書く。

■(反) 準同型、部分代数　E, E' を K 上の代数とする。線形写像 $f : E \to E'$ は $f(xy) = f(x)f(y)$ $(x, y \in E)$ を満たすとき、E から E' への**代数準同型**または単に**準同型**と呼ばれる。準同型 f は双射ならば、逆写像もまた準同型である。このとき f を E から E' の上への**同型**と呼ぶ。

これに対し、線形写像 f が $f(xy) = f(y)f(x)$ $(x, y \in E)$ を満たすときは**反準同型**と呼ばれる。やはり反準同型 f は双射ならば、逆写像もまた反準同型である。これを E から E' の上への**反同型**と呼ぶ。

例えば写像 $E \to E^{\circ}, x \in E \mapsto x^{\circ} \in E^{\circ}$ は反同型で、写像 $E \to E^{\circ\circ}, x \in E \mapsto x^{\circ\circ} \in E^{\circ\circ}$ は同型である。だから $E^{\circ\circ}$ は E と同一視ができる。

E から E' への反準同型 f と E から E'° への準同型 g とは、関係 $g(x) = f(x)^{\circ}$ $(x \in E)$ により一対一に対応している。要するに、ある代数 E' への反準同型とは逆代数 E'° への準同型に他ならない。

なお E が可換ならば、反同型 $E \to E^{\circ}$ は同型で、この場合は E と E° を区別する必要はない。

■部分代数、イデアル、商代数　E の部分空間 F は $x, y \in F$ ならば $xy \in F$ が成り立つとき、E の**部分代数**であるといい、$x \in E, y \in F$ [$x \in F, y \in E$] ならば $xy \in F$ が成り立つとき E の**左イデアル [右イデアル]** であるという。左かつ右イデアルは**両側イデアル**と呼ばれる。左または右イデアルは部分代数である。

例えば E, E' を代数とすると、準同型 $f : E \to E'$ の像 $\mathrm{Img}\, f = \{\, f(x) \mid x \in E \,\}$ は E' の部分代数である。一方 $f : E \to E'$ の核 $\mathrm{Ker}\, f = \{\, x \in E \mid f(x) = 0 \,\}$ は E の両側イデアルである。逆に F が E の両側イデアルならば商空間 E/F は演算 $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$ ($\pi : E \to E/F$ は自然な全射) に関して代数になり (これを**商代数**と呼ぶ)、π は全射準同型。その核は F に一致する。任意の準同型 $f : E \to E'$ に対し、$\tilde{f}(\pi(x)) = f(x)$ で定義される準同型 $\tilde{f} : E/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Img}\, f$ は同型である。

■単位的代数、準同型、部分空間　E を代数とする。E の元 e は $ex = xe = x$ $(x \in E)$ を満たすとき、E の**単位元**という。任意の代数 E はたかだか一つの単位元をもつ。単位元をもつ代数は**単位的代数 (unital algebra)** と呼ばれる。単位的代数たちのあつまりに対しては、単位的準同型、単位的部分代数等々を考えるのが自然である。すなわち E, E' は単位的代数であるとする。E の単位元を E' の単位元に写す代数準同型 $f : E \to E'$ を**単位的準同型** と呼ぶ。F が E の部分代数であり、かつ E の単位元を含むとき、F は E の**単位的部分代数**であるという。これは部分代数 F が代数として単位的であるということ以上のことを意味する (F が単位的であっても、その単位元は E の単位元であるとは限らないから)。

練習問題 3.1. E, E' を代数、$f : E \to E'$ を代数準同型とする。E の方は単位的であると仮定する。f が全射ならば E', f も単位的であることを示せ。

他方 E のイデアルが単位元を含めば、それは E 自身である。したがってイデアルに関しては単位元をもたないものが重要である。

E を単位的代数、F を E の両側イデアルとすれば、商代数 E/F および自然な全射 $\pi : E \to E/F$ は単位的である (練習問題 3.1 を参照)。

例 3.1. 体 K 自身は K-代数として単位的・結合的かつ可換である。

例 3.2. V をベクトル空間とする。$f, g \in \mathrm{L}(V, V)$ の積 $f \cdot g$ を $f \cdot g = f \circ g$ で定義することで $\mathrm{L}(V, V)$ は単位的・結合的代数になる。この代数を $\mathrm{L}(V)$ で表す。$\mathrm{L}(V)$ の単位元は恒等作用素 I である。線形写像 $a \in K \mapsto aI \in \mathrm{L}(V)$ は単位的準同型で、とくに $V \neq 0$ ならば、単射準同型である。ゆえに $V \neq 0$ ならば、K と $\mathrm{L}(V)$ の部分代数 $\{\, aI \mid a \in K \,\}$ を同一視することができる。

例 3.3. E を K 上の単位的・結合的代数とする。$\mathrm{M}(n, E)$ で E の元を成分とする $n \times n$ 行列 (a_{ij}) 全体がつくる K 代数を表す。$\mathrm{M}(n, E)$ は単位的・結合的である。とくに $\mathrm{M}(n, K)$ と $\mathrm{L}(K^n)$ の間にはカノニカルな同型がある。すなわち、$\mathrm{M}(n, K)$ の元 $A = (a_{ij})$ に対して $f_A(x) = y, y_i = \sum_j a_{ij} x_j$ で定義される $f_A \in \mathrm{L}(K^n)$ を対応させ

る写像が代数の同型となっている。

例 3.4 (Hamilton の四元数). (ベクトル空間として) 四元 $1, i, j, k$ から生成され、$1 (\neq 0)$ は単位元、かつ $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$ を満たす $\mathbb{R}$-代数を (Hamilton の) 四元数体といい、$\mathbb{H}$ で表す。$a, b, c, d \in \mathbb{R}, a + bi + cj + dk = 0$ とすると、$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0$, $a = b = c = d = 0$ だから、$1, i, j, k$ は $\mathbb{R}$ 上一次独立である。ゆえに四元数体は同型を除いて唯一つ存在し、$\mathbb{R}$ 上 4 次元である。

四元数体は $\mathrm{M}(2, \mathbb{C})$ の実部分代数として実現することができる。たとえば次の 2×2 複素行列は Pauli 行列と呼ばれている：

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sqrt{-1} \\ \sqrt{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Pauli 行列は $\sigma_p \sigma_q = \sqrt{-1} \sigma_r$ (p, q, r は巡回順), $\sigma_p \sigma_q + \sigma_q \sigma_p = 0$ ($p \neq q$) の関係を満たしている。このことから分かるように、$i = -\sqrt{-1}\sigma_1$, $j = -\sqrt{-1}\sigma_2$, $k = -\sqrt{-1}\sigma_3$ とおけば、$\mathbb{R}$ 上 $1, i, j, k$ が生成する $\mathrm{M}(2, \mathbb{C})$ の実部分代数は四元数体 $\mathbb{H}$ である。

$\mathbb{H}$ は単位的・結合的であるが、可換ではない。

$\mathbb{H}$ の元 $x = a + bi + cj + dk$ に対して $\bar{x} = a - bi - cj - dk$ を x の**共役元**と呼ぶ。$x \cdot \bar{x} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ が成り立つことから明らかに、任意の元 $x \neq 0$ は可逆である ($\bar{x}/(x \cdot \bar{x})$ が逆元になる)。このような代数を**可除代数 (division algebra)** と呼ぶ。環としては可除環とも呼び、斜体とも呼ぶ。

$x \in \mathbb{H} \mapsto \bar{x} \in \mathbb{H}$ は $\mathbb{H}$ の自己反同型を与えている。

■代数の直積と直和　$\{E_i\}_{i \in I}$ を代数の族とする。

ベクトル空間の直積 $E = \prod_i E_i$ に乗法を $(x_i) \cdot (y_i) = (x_i \cdot y_i)$ と定義することで、E は代数になる。これを $\{E_i\}$ の**直積**と呼ぶ。

E_i がすべて結合的 [可換、単位的] ならば直積 E は結合的 [可換、単位的] となる。単位的の場合、1_i を各 E_i の単位元として、(1_i) が E の単位元となる。

またベクトル空間としての直和 $\oplus_i E_i$ は代数の直積 $\prod_i E_i$ の両側イデアルであり、部分代数である。しかし E_i がすべて単位的であったとしても直和 $\oplus_i E_i$ は一般に単位的でない：直和が単位的代数となるのは、有限個の i をのぞいてあとはすべて $E_i = 0$ となっている場合だけである。

つまり単位的代数のあつまりに対しては**有限直和** $E_1 \oplus \cdots \oplus E_n$ だけが定義できて、この場合、直和と直積に違いはなく、直和は単位的代数になる。

■代数のテンソル積　E_1, E_2 を K-代数とする。ベクトル空間としてのテンソル積 $E_1 \otimes E_2$ にカノニカルな乗法 $\mu : (E_1 \otimes E_2) \otimes (E_1 \otimes E_2) \to E_1 \otimes E_2$ を

$$\mu((x \otimes x') \otimes (y \otimes y')) = xy \otimes x'y'$$

と定義することで $E_1 \otimes E_2$ を代数にすることができる。この乗法を備えた代数 $E_1 \otimes E_2$ を**代数 E_1, E_2 のテンソル積**と呼ぶ。定義により

$$(x \otimes x') \cdot (y \otimes y') = xy \otimes x'y' \quad (x, y \in E_1, x', y' \in E_2)$$

E_1, E_2 が結合的 [可換、単位的] 代数ならば $E_1 \otimes E_2$ は結合的 [可換、単位的] 代数である。$1, 1'$ をそれぞれ E_1, E_2 の単位元とすれば $1 \otimes 1'$ は $E_1 \otimes E_2$ の単位元である。

命題 3.1. E, E_i を K 上の代数とすると、ベクトル空間としての自然な同型 $(E_1 \otimes E_2) \otimes E_3 \to E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$, $E_1 \otimes E_2 \to E_2 \otimes E_1$, $K \otimes E \to E$, $E \otimes K \to E$ は、いずれも代数の同型である。

E_1, E_2 が単位的・結合的代数の場合、代数のテンソル積 $E_1 \otimes E_2$ は次に述べる普遍写像性質で特徴づけられる。

命題 3.2 (普遍写像性質). E_1, E_2 は単位的・結合的代数であると仮定し、それぞれの単位元を $1, 1'$ と書く。写像 $\theta_1 : E_1 \to E_1 \otimes E_2, \theta_2 : E_2 \to E_1 \otimes E_2$ をそれぞれ $\theta_1 : x \in E_1 \mapsto x \otimes 1' \in E_1 \otimes E_2, \theta_2 : x' \in E_2 \mapsto 1 \otimes x' \in E_1 \otimes E_2$ により定義すると、θ_1, θ_2 は単位的準同型で、$\theta_1(x)\theta_2(x') = \theta_2(x')\theta_1(x)$ $(x \in E, x' \in E_2)$ を満たす。

F を K 上の別の任意の単位的・結合的代数とし、$f_1 : E_1 \to F$, $f_2 : E_2 \to F$ を単位的準同型で、$f_1(x)f_2(x') = f_2(x')f_1(x)$ $(x \in E_1, x' \in E_2)$ を満たすものだとすると、$f_1 = f \circ \theta_1, f_2 = f \circ \theta_2$ となる代数準同型 $f : E_1 \otimes E_2 \to F$ が唯一つある。f は単位的である。

$E_1, E_2 \neq 0$ ならば θ_1, θ_2 は単射である。これらを自然な単射と呼ぶ。

$$\begin{tikzcd} E_1 \arrow[r, "\theta_1"] \arrow[dr, bend right, "f_1"'] & E_1 \otimes E_2 \arrow[d, "f"] & E_2 \arrow[l, "\theta_2"'] \arrow[dl, bend left, "f_2"] \\ & F & \end{tikzcd}$$

証明 線形写像 $f : E_1 \otimes E_2 \to F$ で $f(x \otimes x') = f_1(x)f_2(x')$ を満たすものが唯一つある。$f(\theta_1(x)) = f(x \otimes 1') = f_1(x)f_2(1') = f_1(x)$, 同様に $f(\theta_2(x')) = f_2(x')$ が成り立つ。
f は準同型である。実際、

$$\begin{aligned} &f(x \otimes x')(y \otimes y')) = f(xy \otimes x'y') = f_1(xy)f_2(x'y') \\ &= f_1(x)f_1(y)f_2(x')f_2(y') = f_1(x)f_2(x')f_1(y)f_2(y') = f(x \otimes x')f(y \otimes y') \end{aligned}$$

となっている。また、定義から明らかに f は単位的である。
$f' : E_1 \otimes E_2 \to F$ を $f_1 = f' \circ \theta_1, f_2 = f' \circ \theta_2$ を満たす別の準同型とすると $f'(x \otimes x') = f'(x \otimes 1')f'(1 \otimes x') = f'(\theta_1(x))f'(\theta_2(x')) = f_1(x)f_2(x')$, ゆえに $f' = f$ (一意性)。
$E, E' \neq 0$ ならば $1, 1' \neq 0$ だから θ_i は明らかに単射である。 □

例 3.5. V_1, V_2 を K-ベクトル空間とする。自然な線形同型 $\mathrm{L}(V_1, V_1) \otimes \mathrm{L}(V_2, V_2) \simeq \mathrm{L}(V_1 \otimes V_2, V_1 \otimes V_2)$ は代数同型である：$\mathrm{L}(V_1) \otimes \mathrm{L}(V_2) \simeq \mathrm{L}(V_1 \otimes V_2)$.

例 3.6 (行列の Kronecker 積). 次の代数同型がある。

$$\mathrm{M}(m, K) \otimes \mathrm{M}(n, K) \simeq \mathrm{M}(mn, K), \quad E_{ij} \otimes E_{kl} \mapsto E_{n(i-1)+k, n(j-1)+l}$$

実際, $\mathrm{M}(m, K) \otimes \mathrm{M}(n, K) \simeq \mathrm{L}(K^m) \otimes \mathrm{L}(K^n) \simeq \mathrm{L}(K^m \otimes K^n)$ の同型がある。この同型の下、$E_{ij} \otimes E_{kl} \in \mathrm{M}(m, K) \otimes \mathrm{M}(n, K)$ には $f(e_p \otimes e_q) = \delta_{jp}\delta_{lq}\, e_i \otimes e_k$ で定められる $f \in \mathrm{L}(K^m \otimes K^n)$ が対応する。さらに $K^m \otimes K^n \simeq K^{mn}$ (辞書式順) だから $\mathrm{L}(K^m \otimes K^n) \simeq \mathrm{L}(K^{mn})$ の同型がある。$f \in \mathrm{L}(K^{mn})$ と考えると $f(e_{n(p-1)+q}) = \delta_{jp}\delta_{lq}\, e_{n(i-1)+k}$ である。

一方、$E_{n(i-1)+k, n(j-1)+l} \in \mathrm{M}(mn, K)$ には $f'(e_{n(p-1)+q}) = \delta_{n(j-1)+l, n(p-1)+q}\, e_{n(i-1)+k}$ で定められる $f' \in \mathrm{L}(K^{mn})$ が対応するが、$\delta_{n(j-1)+l, n(p-1)+q} = \delta_{jp}\delta_{lq}$ だから、$f = f'$ である。したがって、$E_{ij} \otimes E_{kl}$ には $E_{n(i-1)+k, n(j-1)+l}$ が対

応する。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{M}(m,K)\otimes\mathrm{M}(n,K) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, leftrightarrow] & \mathrm{M}(mn,K) \arrow[d, leftrightarrow] \\
\mathrm{L}(K^m)\otimes\mathrm{L}(K^n) \arrow[r, leftrightarrow] & \mathrm{L}(K^{mn})
\end{tikzcd}$$

一般の行列 $A=(a_{ij})\in\mathrm{M}(m,K)$, $B=(b_{kl})\in\mathrm{M}(n,K)$ に対しては、$A\otimes B$ には次の mn 次の行列 $(a_{ij}B)\in\mathrm{M}(mn,K)$ が対応する：

$$A\otimes B\longleftrightarrow\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots \\ a_{21}B & & \\ \vdots & & \end{pmatrix}.$$

右辺の行列を A と B の **Kronecker** 積と呼んで $A\otimes B$ と書くことがある。Kronecker 積は上に見るように本質的に 一次変換 A, B のテンソル積である。

練習問題 3.2. $A,C\in\mathrm{M}(m,K)$, $B,D\in\mathrm{M}(n,K)$, $x\in K^m$, $y\in K^n$ とする。Kronecker 積の意味で

$$(A\otimes B)(x\otimes y)=(Ax)\otimes(By),$$
$$(A\otimes B)(C\otimes D)=AC\otimes BD$$

が成り立つことを直接、行列の計算によって示せ。ただし、$x\otimes y=(x_1y,\cdots,x_my)$ とする。

例 3.7. E を K 上の単位的・結合的代数とし、簡単のため、これは K 上有限次元であると仮定する ($p=\dim E<\infty$)。このとき、次の同型がある：

$$E\otimes_K\mathrm{M}(n,K)\simeq\mathrm{M}(n,E),\quad \lambda\otimes(a_{ij})\mapsto(\lambda a_{ij})$$

実際、上の式で定義される K 線形写像 φ があり、φ は単位的代数の準同型である。φ が全射であることは容易に確認できる。代数はどちらも K 上 pn^2 次元だから φ は同型。

練習問題 3.3. $E_1,\cdots,E_n,F$ は単位的代数とする。ベクトル空間としての自然な同型

$$(E_1\oplus\cdots\oplus E_n)\otimes F\simeq(E_1\otimes F)\oplus\cdots\oplus(E_n\otimes F)$$

がやはり単位的代数の同型となっていることを確認せよ。

■代数の係数拡大　E を K 上の代数、L を K の拡大体とする。L は K 上の代数と見なせることに注意する。すると E の L への係数拡大 $L\otimes_K E$ は K-代数のテンソル積であるが、これは L-ベクトル空間でもあり、乗法は式 $(a\otimes x)(b\otimes y)=ab\otimes xy$ から明らかに L-線形である。したがって $L\otimes_K E$ は L 上の代数である。

E が結合的 [可換] ならば $L\otimes_K E$ は結合的 [可換] で逆ももちろん成り立つ。

E が単位的ならば $L\otimes_K E$ は単位的で、$1\otimes 1_E$ が単位元になる。

命題 3.3. Ω を任意の L-代数、$f:E\to\Omega$ を K-準同型とすると、f の L-線形写像への延長 $f':L\otimes_K E\to\Omega$ は L-準同型である。E,Ω,f が単位的ならば f' は単位的である。

証明 $L \otimes_K E$ は $1 \otimes x$ $(x \in E)$ の形の元により L 上生成されるから、任意の $x, y \in E$ に対して $f'((1 \otimes x)(1 \otimes y)) = f'(1 \otimes x)f'(1 \otimes y)$ を示せば f' が L-準同型であることを証明したことになる。実際、

$$\begin{aligned} & f'((1 \otimes x)(1 \otimes y)) \\ & = f'(1 \otimes xy) = f(xy) \\ & = f(x)f(y) = f'(1 \otimes x)f'(1 \otimes y) \end{aligned}$$

となっている。
後半は $1 \otimes 1_E$ が $L \otimes_K E$ の単位元になるから $f'(1 \otimes 1_E) = f(1_E) = 1_\Omega$. すなわち、$f'$ は単位的である。 □

3.2 次数付き代数

■**次数付き代数**　E を K 上の代数とし、Γ を加法群とする。E に対する Γ 型の**次数付け (grading)** とは Γ を添字の集合とし、E の部分空間から成る族 $\{ E_p \}_{p \in \Gamma}$ で次の条件を満たすものである：

1. $E = \oplus_{p \in \Gamma} E_p$,
2. $E_p \cdot E_q \subset E_{p+q}$ $(p, q \in \Gamma)$.

Γ 型の次数付けの指定された代数を Γ 型の**次数付き代数 (graded algebra)** と呼んで、略号 $E = \oplus_{p \in \Gamma} E_p$ で表す。
　次数の加法群 Γ としては $\Gamma = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ の二つの場合が重要である。ここで $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ である。本書では $\mathbb{Z}/2$ の元を $(0), (1)$ と表す。$(p) = \{ p' \in \mathbb{Z} \mid p' \equiv p \pmod 2 \}$ である。

例 3.8. 一変数多項式環 $K[t] = \oplus_{p \in \mathbb{Z}, p \geq 0} Kt^p$ は $\mathbb{Z}$ 型の次数付き代数である。ここに Kt^p は p 次の単項式 at^p $(a \in K)$ がつくる部分空間を表す。

例 3.9. $\mathbb{Z}$ 型の次数付き代数 $E = \oplus_{p \in \mathbb{Z}}$ は、次の式が示すように自然に $\mathbb{Z}_2$ 型にも次数付けられる：

$$\begin{aligned} E & = \cdots \oplus E_{-1} \oplus E_0 \oplus E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \\ & = \underbrace{\left(\oplus_{p \equiv 0} E_p \right)}_{E_{(0)}} \oplus \underbrace{\left(\oplus_{p \equiv 1} E_p \right)}_{E_{(1)}} \end{aligned}$$

■**次数付きベクトル空間**　しかし代数に限らず、ある種のベクトル空間 V に対しても次数付けを考えたほうが便利である。すなわち、ベクトル空間 V に対する Γ 型の次数付けは V の部分空間から成る族 $\{ V_p \}_{p \in \Gamma}$ で $V = \oplus_{p \in \Gamma} V_p$ を満たすものであると定義する。そして Γ 型の次数付けの指定されたベクトル空間を Γ 型の**次数付きベクトル空間 (graded vector space)** と呼んで、記号 $V = \oplus_{p \in \Gamma} V_p$ で表すことは代数のときと同じである。
　次数付き代数は次数付きベクトル空間の特別な場合と考えられる。
　次数付きベクトル空間 $V = \oplus_{p \in \Gamma} V_p$ において V_p に属する元を p 次の**斉次元 (homogeneous element)** と呼ぶ。斉次元 x は $x \neq 0$ ならば $x \in V_p$ なる $p \in \Gamma$ が唯一つ確定する。これを x の**次数 (degree)** と呼ぶ。

練習問題 3.4. $E = \oplus_{p \in \Gamma} E_p$ を次数付き代数とする。E の単位元 1 は 0 次の斉次元であることを示せ。

■**次数付き部分空間、斉次線形写像**　$V = \oplus_{p \in \Gamma} V_p$ を次数付きベクトル空間とする。V の部分空間 W は $W = \oplus_{p \in \Gamma} (V_p \cap W)$ のとき V の**次数付き部分空間 (graded subspace)** であるという。以下の (a), (b) は次数付きであることに同値：(a) $\sum_p x_p \in W$ $(x_p \in V_p)$ ならば $x_p \in W$, (b) 部分空間 $W_p \subset V_p$ があって $W = \oplus_p W_p$.

$V = \oplus_{p\in\Gamma} V_p$, $W = \oplus_{p\in\Gamma} W_p$ を同じ Γ 型の次数付きベクトル空間とし、$r \in \Gamma$ とする。線形写像 $f : V \to W$ は

$$f(V_p) \subset W_{p+r} \quad (p \in \Gamma)$$

を満たすとき、r 次の**斉次線形写像**であるという。とくに 0 次の斉次線形写像は**次数を保つ**線形写像とも言われる。

練習問題 3.5. $f : V \to W$ を r 次の斉次線形写像とすると、(a) $\mathrm{Ker}\, f$ は V の次数付き部分空間、(b) $\mathrm{Img}\, f$ は W の次数付き部分空間である。このことを確かめよ。

$f(V_p) \subset W_{-p}$ $(p \in \Gamma)$ なる線形写像 f を考える必要も出てくる。このような f は**次数を逆にする**という。次数を逆にする線形写像は一般に斉次ではない。

$\mathrm{L}_r(V, W)$ を V から W への r 次の斉次線形写像ぜんぶの集合とすると、$\mathrm{L}_r(V, W)$ は $\mathrm{L}(V, W)$ の部分空間である。$r \in \Gamma$ 全体に渡る $\mathrm{L}_r(V, W)$ の和 $\sum_{r\in\Gamma} \mathrm{L}_r(V, W)$ が直和であることは容易に確認できる。これを $\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V, W)$ と書く。すなわち、$\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V, W) = \oplus_{r\in\Gamma} \mathrm{L}_r(V, W)$ は次数付きベクトル空間である。

練習問題 3.6. $\sum_{r\in\Gamma} \mathrm{L}_r(V, W)$ が直和であることを示せ。

$\mathrm{L}_{\mathrm{a-gr.}}(V, W) = \oplus_{r\in\Gamma} \mathrm{L}_{-r}(V, W)$ という記号も導入しておく。これはベクトル空間としては $\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V, W)$ に等しいが、$\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V, W)$ とは**逆の次数付け**がなされてある次数付きベクトル空間である。

V, W, X を Γ 型の次数付きベクトル空間とし、$r, s \in \Gamma$ とする。$f \in \mathrm{L}_r(V, W)$, $g \in \mathrm{L}_s(W, X)$ ならば $g \circ f \in \mathrm{L}_{r+s}(V, X)$ は明らかである。ここから一般に $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V, W)$, $g \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(W, X)$ に対して $g \circ f \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V, X)$ であることが分かる。

$\mathrm{L}_r(V, V)$, $\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V, V)$ をそれぞれ $\mathrm{L}_r(V)$, $\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V)$ と略記する。$\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V)$ は $\mathrm{L}(V)$ の単位的部分代数であり、$\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(V) = \oplus_{r\in\Gamma} \mathrm{L}_r(V)$ は次数付き代数である。

■次数付き代数の準同型　$E = \oplus_p E_p$, $E' = \oplus_p E'_p$ を次数付き代数とする。代数準同型 $\varphi : E \to E'$ は

$$\varphi(E_r) \subset E'_r \quad (r \in \Gamma)$$

を満たすとき (つまり次数が 0 のとき、言い換えると次数を保つときに) **次数付き代数の準同型**とも言われる。

例 3.10. $E = \oplus_p E_p$ を次数付き代数とする。$x \in E$ に対して、x による**左乗法 (left multiplication)** $e_x : E \to E$ を $e_x(y) = x \cdot y$ $(y \in E)$ により定義する。$x \in E \mapsto e_x \in \mathrm{L}(E)$ は線形で、$x \in E_r$ ならば $e_x \in \mathrm{L}_r(E)$ であるから、一般に $x \in E$ ならば $e_x \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(E)$ である。E は単位的・結合的であるとすると、写像 $x \in E \mapsto e_x \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(E)$ は次数付き代数の単位的準同型である。

注意. 同様に x による右乗法 $e'_x(y) = y \cdot x$ も定義できるが、本書では扱わない。

■微分と反微分　$E = \oplus_{p\in\Gamma} E_p$ を次数付き代数とし、$r \in \Gamma$ とする。

E 上の r 次の**微分 (derivation)** とは r 次の斉次線形写像 $D : E \to E$ で、

$$D(xy) = (Dx)y + x(Dy) \quad (x, y \in E)$$

を満たすものをいう。

また $\Gamma = \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2$ のとき、E 上の r 次の**反微分 (antiderivation)** とは r 次の斉次線形写像 $D : E \to E$ で、

$$D(xy) = (Dx)y + (-1)^{pr} x(Dy) \quad (x \in E_p, y \in E, p \in \Gamma)$$

を満たすものをいう (われわれの定義によれば偶数次の反微分は微分である)。

注意. ただし $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ の場合、奇数次の反微分をたんに反微分と呼ぶ。

例 3.11. 一変数多項式環 $K[t]$ において "微分" $D : t^p \mapsto pt^{p-1}$ は -1 次の微分である。

次に線形変換の交換子積、反交換子積を定義しよう。

A, B をそれぞれ p, q 次の斉次線形変換 $E \to E$ とする (微分・反微分とは限らない)。

$AB - BA, AB - (-1)^{pq}BA$ をそれぞれ A と B の**交換子積**、**反交換子積** と呼ぶ。これらは $p + q$ 次の斉次線形変換である。

本書では使用しないが、次の命題が成り立つ。

命題 3.4. D, D' がそれぞれ r, r' 次の微分ならば、交換子積 $DD' - D'D$ は $r + r'$ 次の微分である。

D, D' がそれぞれ r, r' 次の反微分ならば、反交換子積 $DD' - (-1)^{rr'} D'D$ は $r + r'$ 次の反微分である。

証明は読者に委ねる。

例 3.12. (多様体を勉強した人は読む)

実 n 次元多様体 M の微分形式たちが作る次数付き代数を考えると、外微分 d は 1 次の反微分、ベクトル場 X に対し内部積 i_X は -1 次の反微分である。ゆえに $i_X \circ d + d \circ i_X$ は 0 次の反微分 (微分) である。微分形式に作用する Lie 微分 L_X はこれらとは別に定義される 0 次の微分であるが、$L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ の関係がある (H.Cartan の関係式)。

■次数付き双対空間　次数付きベクトル空間 $V = \oplus_p V_p$ に対して、次数付きベクトル空間 $V^{(*)} = \oplus_p {V_p}^*$ を V の**次数付き双対空間 (graded dual space)** と呼ぶ。

$V^{(*)} \subset \prod_p {V_p}^* \simeq V^*(= \mathrm{L}(V, K))$ だから、$V^{(*)} \subset V^*$ と見なすことができる。ここで $\prod_p {V_p}^* \simeq V^*(= \mathrm{L}(V, K))$ の意味を説明しておこう。$\xi = (\xi_p) \in \prod_p {V_p}^*$ に対して $\xi' \in V^*$ を

$$\langle \xi', x \rangle = \textstyle\sum_p \langle \xi_p, x_p \rangle \quad (x = (x_p) \in V)$$

によって定義する。対応 $\xi \in \prod_p {V_p}^* \mapsto \xi' \in V^*$ は線形同型であることが容易に分かる (系 1.5 を参照)。この意味で $\prod_p {V_p}^* \simeq V^* = \mathrm{L}(V, K)$ である。

この同型の下で、$\xi \in V^{(*)}$ に対応する線形写像 $\xi' \in V^* = \mathrm{L}(V, K)$ はどのように特徴づけられるか詳しく見てみよう。

K を次数付き代数 $K = \oplus_p K_p$ と考える (もちろん $K_0 = K, K_p = 0\ (p \neq 0)$ である。これが K-代数としての K に対する唯一の次数付けである)。

命題 3.5. $\xi \in \prod_p {V_p}^*$ とする。このとき $\xi \in {V_p}^* \iff \xi' \in \mathrm{L}_{-p}(V, K)$ が成り立つ。

証明 $\xi' \in \mathrm{L}_{-p}(V, K)$ は $\xi'(V_q) \subset K_{q-p}\ (\forall q)$ という意味であり、これは

$$\xi'(V_q) = 0 \quad (q \neq p)$$

に同値である。命題の主張はここから明らかであろう。 □

こうして $\xi \in {V_p}^*$ に対応する線形写像 $\xi' \in \mathrm{L}(V, K)$ は $-p$ 次の斉次線形写像として特徴づけられることが分

かった。すなわち

$$V_p{}^* \simeq \mathrm{L}_{-p}(\,V\,,\,K\,), \quad V^{(*)} \simeq \mathrm{L}_{\mathrm{a\text{-}gr.}}(\,V\,,\,K\,)$$

が成り立つ。

練習問題 3.7. 双一次形式 $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle : V^{(*)} \times V \to K$ が非退化であることを証明せよ。

V の次数付き双対 $V^{(*)}$ のそのまた次数付き双対を $V^{(**)}$ と書くと、自然な単射 $x = (x_p) \in V \mapsto x^{(**)} = (x_p{}^{**}) \in V^{(**)}$ がある。$x_p \in V_p$ と $x_p{}^{**} \in V_p{}^{**}$、$x \in V$ と $x^{(**)} \in V^{(**)}$ を同一視すると、V は $V^{(**)}$ の次数付き部分空間で、任意の $\xi \in V^{(*)}, x \in V$ に対して

$$\langle\,\xi\,,\,x\,\rangle = \textstyle\sum_p \langle\,\xi_p\,,\,x_p\,\rangle = \sum_p \langle\,x_p\,,\,\xi_p\,\rangle = \langle\,x\,,\,\xi\,\rangle$$

が成り立つ。

■次数付き双対写像　次に $V = \oplus_p V_p, W = \oplus_p W_p$ を次数付きベクトル空間とし、$p, r \in \Gamma$ とする。

$f \in \mathrm{L}_r(\,V\,,\,W\,), \xi \in W_p{}^* \simeq \mathrm{L}_{-p}(\,W\,,\,K\,)$ ならば、$f^*(\xi) = \xi \circ f \in \mathrm{L}_{r-p}(\,V\,,\,K\,) \simeq V_{p-r}{}^*$ である。すなわち、$f \in \mathrm{L}_r(\,V\,,\,W\,)$ ならば $f^* : W^* \to V^*$ は $W_p{}^*$ を $V_{p-r}{}^*$ の中に写し、ゆえに $W^{(*)}$ を $V^{(*)}$ の中に写す。f^* の $W^{(*)}$ への制限を $f^{(*)}$ と書くと、$f^{(*)} : W^{(*)} \to V^{(*)}$ は $-r$ 次の斉次線形写像である：$f^{(*)} \in \mathrm{L}_{-r}(\,W^{(*)}\,,\,V^{(*)}\,)$。そして明らかに対応 $f \in \mathrm{L}_r(\,V\,,\,W\,) \mapsto f^{(*)} \in \mathrm{L}_{-r}(\,W^{(*)}\,,\,V^{(*)}\,)$ は線形である。

一般の $f \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,V\,,\,W\,)$ は斉次線形写像の和 $f = \sum_r f_r$ だから、$f^* = \sum_r f_r{}^*$ はやはり $W^{(*)}$ を $V^{(*)}$ の中に写し、$f^{(*)} = f^*|_{W^{(*)}}$ が定義できる。$f^{(*)} = \sum_r f_r{}^{(*)}$ だから $f^{(*)} \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,W^{(*)}\,,\,V^{(*)}\,)$ である。

$f^{(*)}$ を f の**次数付き双対写像 (graded dual map)** と呼ぶ。

$f^{(*)}$ の定義から明らかに任意の $x \in V, \xi \in W^{(*)}, f \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,V\,,\,W\,)$ に対して、

$$\langle\,f^{(*)}(\xi)\,,\,x\,\rangle = \langle\,\xi\,,\,f(x)\,\rangle$$

が成り立つ。

対応 $(*) : f \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,V\,,\,W\,) \mapsto f^{(*)} \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,W^{(*)}\,,\,V^{(*)}\,)$ は次数を逆にする単射線形写像である。

$X = \oplus_p X_p$ も次数付きベクトル空間とする。$f \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,V\,,\,W\,), g \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,W\,,\,X\,)$ ならば $g \circ f \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,V\,,\,X\,)$ であり、このとき $(g \circ f)^{(*)} = f^{(*)} \circ g^{(*)}$ が成り立つ。

したがって、とくに $V = W$ の場合を考えると、対応 $(*) : f \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,V\,) \mapsto f^{(*)} \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,V^{(*)}\,)$ は単位的反準同型である。

■斉次双一次形式　$V = \oplus_p V_p, W = \oplus_p W_p$ を次数付きベクトル空間とする。

双一次形式 $f : V \times W \to K$ は $f : V \to W^*$ と見なしたときに

1. $f(V) \subset W^{(*)}$,
2. $f : V \to W^{(*)}$ は r 次の斉次

であるならば、r 次の**斉次双一次形式**であるという。

命題 3.6. $f : V \times W \to K$ を r 次の斉次双一次形式とすると、転置双一次形式 ${}^t f : W \times V \to K$ は $-r$ 次の斉次双一次形式である。

証明 任意の $x \in V, y \in W$ に対して

$$\langle {}^{\mathrm{t}}f(y)\,,\,x\,\rangle = {}^{\mathrm{t}}f(y,x) = f(x,y)$$
$$= \langle\, f(x)\,,\,y\,\rangle = \langle\, y\,,\,f(x)\,\rangle = \langle\, f^{(*)}(y)\,,\,x\,\rangle \quad (x \in V, y \in W)$$

だから、${}^{\mathrm{t}}f = f^{(*)}|_W$ である。$f^{(*)} : W^{(**)} \to V^{(*)}$ は $-r$ 次だから、${}^{\mathrm{t}}f : W \to V^{(*)}$ も $-r$ 次である。 □

以下では 0 次の斉次双一次形式だけを考える。

$f : V \times W \to K$ を 0 次双一次形式とすると、各次数 p について $f(V_p) \subset W_p{}^*$ だから $f_p : V_p \to W_p{}^*$ が、$f_p = f|_{V_p}$ により定義される。f_p を双一次形式 $f_p : V_p \times W_p \to K$ と見なすと、

$$f\,(\,x\,,\,y\,) = \textstyle\sum_p f_p\,(\,x_p\,,\,y_p\,) \quad (x = (x_p),\ y = (y_p)) \tag{1}$$

が成り立つ。実際、$f(x) = (f_p(x_p))$, $f_p(x_p) \in W_p{}^*$. ゆえに $f\,(\,x\,,\,y\,) = \langle\, f(x)\,,\,y\,\rangle = \sum_p \langle\, f_p(x_p)\,,\,y_p\,\rangle = \sum_p f_p\,(\,x_p\,,\,y_p\,)$ となって、(1) を得る。また

$$({}^{\mathrm{t}}f)_p = {}^{\mathrm{t}}(f_p) \tag{2}$$

が成り立つ。実際、${}^{\mathrm{t}}f\,(\,y\,,\,x\,) = \sum_p ({}^{\mathrm{t}}f)_p\,(\,y_p\,,\,x_p\,)$. 一方、${}^{\mathrm{t}}f\,(\,y\,,\,x\,) = f\,(\,x\,,\,y\,) = \sum_p f_p\,(\,x_p\,,\,y_p\,) = \sum_p {}^{\mathrm{t}}(f_p)\,(\,y_p\,,\,x_p\,)$. 任意の p に対して、x, y を $x_q = y_q = 0\ (q \neq p)$ なるように選ぶと、$({}^{\mathrm{t}}f)_p\,(\,y_p\,,\,x_p\,) = {}^{\mathrm{t}}(f_p)\,(\,y_p\,,\,x_p\,)$. ゆえに (2) が得られる。

命題 3.7. $V = \oplus_p V_p$, $W = \oplus_p W_p$ を次数付きベクトル空間とする。0 次双一次形式 $f : V \times W \to K$ は各成分 $V_p \times W_p$ への制限 $f_p : V_p \times W_p \to K$ が非退化のとき、かつそのときに限り非退化である。

証明 (1) からも明らかであるが、次のように考えることもできる。f は非退化 $\Leftrightarrow$ $f, {}^{\mathrm{t}}f$ は単射 $\Leftrightarrow$ 各次数 p に関して $f_p, ({}^{\mathrm{t}}f)_p = {}^{\mathrm{t}}(f_p)$ は単射 $\Leftrightarrow$ 各次数 p に関して f_p は非退化。 □

■**内部積 (I)** $E = \oplus_p E_p$ を次数付き単位的・結合的代数とし、$E^{(*)} = \oplus_p E_p{}^*$ をその次数付き双対 (ベクトル空間) とする。$E^{(*)}$ のほうは次数付き代数であると仮定しない。

$x \in E$ に対して $e_x \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,E\,)$ を x による左乗法とする：$e_x(y) = x \cdot y$。このとき、$i_x = e_x{}^{(*)} \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,E^{(*)}\,)$ とおいて、作用素 i_x を $E^{(*)}$ における x による**右内部積 (right interior product)** と呼ぶ。そして $i_x(\xi)$ を x による ξ の右内部積と呼ぶ (読者は ξ に x が右から作用しているというイメージをもつとよい)。右内部積を略して内部積とも呼ぶ。$i_x(\xi)$ を $x \lrcorner\, \xi$ と書いてある本もある。対応 $x \in E \mapsto i_x \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,E^{(*)}\,)$ は次数を逆にする単位的反準同型である。

内部積の定義から明らかに

$$\langle\, i_x(\xi)\,,\,y\,\rangle = \langle\, \xi\,,\,e_x(y)\,\rangle = \langle\, \xi\,,\,x \cdot y\,\rangle \quad (x, y \in E, \xi \in E^{(*)}).$$

$E = \oplus_p E_p$, $F = \oplus_p F_p$ を次数付き単位的・結合的代数とし、$f : E \to F$ を次数付き代数の単位的準同型とする。このとき

$$f \circ e_x = e_{f(x)} \circ f \quad (x \in E) \tag{3}$$

が成り立つ。実際、$(f \circ e_x)(y) = f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) = (e_{f(x)} \circ f)(y)$.

式 (3) の両辺の次数付き双対をとって

$$i_x \circ f^{(*)} = f^{(*)} \circ i_{f(x)} \quad (x \in E) \tag{4}$$

を得る。

■内部積 (II)　次に $E=\oplus_p E_p$ は次数付きベクトル空間、$E^{(*)}=\oplus_p {E_p}^*$ をその次数付き双対とし、加えて $E^{(*)}$ は次数付き単位的・結合的代数であると仮定する。E の方は代数であると仮定しない。

$\xi\in E^{(*)}$ に対して、$e_\xi\in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(E^{(*)})$ をやはり左乗法とする。

一次変換 $\varphi\in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(E)$ が存在して $\varphi^{(*)}=e_\xi$ を満たしているとき、E には ξ による右内部積が定義できるという。このとき、上記の関係を満たす φ は一意に決まるから、それを i_ξ と書いて、E における ξ による右内部積と呼ぶ。そして $i_\xi(x)$ を ξ による x の右内部積と呼ぶ。右内部積を略して内部積とも呼ぶ。$i_\xi(x)$ を $\xi\lrcorner x$ と書いてある本もある。

E において ξ による右内部積が定義できるような ξ の集合は $E^{(*)}$ の単位的部分代数をつくる。この部分代数をとりあえず、Ξ と書くと、対応 $\xi\in\Xi\mapsto i_\xi\in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(E)$ は次数を逆にする単位的反準同型である。

内部積の定義から明らかに

$$\langle\,\xi\cdot\eta\,,\,x\,\rangle=\langle\,e_\xi(\eta)\,,\,x\,\rangle=\langle\,\eta\,,\,i_\xi(x)\,\rangle\quad(x\in E,\xi\in\Xi,\eta\in E^{(*)}).$$

3.3　次数付き代数の商とテンソル積

■次数付き代数の商　$E=\oplus_{p\in\Gamma}E_p$ を次数付き代数とし、$I=\oplus_p I_p$ を次数付き両側イデアル ($I_p=E_p\cap I$)、$\pi:E\to E/I,\pi_p:E_p\to E_p/I_p$ を自然な全射とする。

$\oplus_{p\in\Gamma}E_p/I_p$ における乗法を $\pi_p(x)\cdot\pi_q(y)=\pi_{p+q}(xy)$ により定義すると $\oplus_{p\in\Gamma}E_p/I_p$ は次数付き代数になる。

I は次数付きだから、写像 $E/I\to\oplus_{p\in\Gamma}E_p/I_p,\pi(\sum_p x_p)\mapsto\sum_p\pi_p(x_p)$ は well-defined で代数の同型である。

そこで E/I を次数付き代数 $E/I=\oplus_{p\in\Gamma}E_p/I_p$ と考えて、これを $E=\oplus_{p\in\Gamma}E_p$ の**次数付きイデアル** $I=\oplus_p I_p$ **による商**と呼ぶ。π は次数付き代数の準同型である。

E' を別の次数付き代数とし、I' を F の次数付き両側イデアル、$\pi':E'\to I'$ を自然な全射とする。

$f:E\to E'$ を $f(I)\subset I'$ なる線形写像とする。このとき $\bar f\circ\pi=\pi'\circ f$ を満たす線形写像 $\bar f:E/I\to E'/I'$ が唯一つ存在する。これを f **が引き起こす商代数の写像**と呼ぶ。

f が r 次ならば $\bar f$ は r 次、f が [単位的] 準同型ならば $\bar f$ は [単位的] 準同型、f が [反] 微分ならば、$\bar f$ は [反] 微分である。

■次数付き代数のテンソル積、係数拡大　$E=\oplus_p E_p,E'=\oplus_p E'_p$ を K 上の次数付き代数とする。このときテンソル積

$$E\otimes E'=\oplus_p\Big(\oplus_{q+q'=p}(E_q\otimes E'_{q'})\Big)$$

はまた次数付き代数になる。実際、$x\otimes x'\in E_q\otimes E'_{q'}$ $(p=q+q'),y\otimes y'\in E_s\otimes E'_{s'}$ $(r=s+s')$ とすると、$(x\otimes x')\cdot(y\otimes y')=xy\otimes x'y'$ は $p+r$ 次の斉次元である。ゆえに p 次の任意の元 z と q 次の任意の元 w に対して、$z\otimes w$ は $p+r$ 次の元である。

これを**次数付き代数 E と E' のテンソル積**と呼ぶ。

その次数付けの定義により、$x\in E$ が p 次、$x'\in E'$ が p' 次の斉次元ならば $x\otimes x'\in E\otimes E'$ は $p+p'$ 次の斉次元である。

次に $E=\oplus_p E_p$ を K 上の次数付き代数、L を K の拡大体とする。E の係数拡大

$$L\otimes_K E=\oplus_p\,(L\otimes_K E_p)$$

は斉次成分 $L\otimes_K E_p$ が L の作用で閉じているから、L 上の次数付きベクトル空間である。さらに任意の $a,b\in L, x\in E_p, y\in E_q$ に対して $(a\otimes x)\cdot(b\otimes y)=ab\otimes xy\in L\otimes_K E_{p+q}$ だから $(L\otimes_K E_p)\cdot(L\otimes_K E_q)\subset L\otimes_K(E_{p+q})$ が成り立ち、$L\otimes_K E$ は L 上の次数付き代数である。これを **K 上の次数付き代数 E の L への係数拡大**と呼ぶ。

練習問題 3.8. E, E_i を K 上の次数付き代数とすると、ベクトル空間としての自然な同型

$$
\begin{aligned}
&(E_1\otimes E_2)\otimes E_3\to E_1\otimes(E_2\otimes E_3),\\
&E_1\otimes E_2\to E_2\otimes E_1,\\
&K\otimes E\to E,\\
&E\otimes K\to E
\end{aligned}
$$

は、いずれも次数付き代数の同型であることを示せ。

練習問題 3.9. (命題 3.2 において)

E_1, E_2 が Γ 型の次数付き代数ならば θ_1,θ_2 は次数を保つ。

F も Γ 型の次数付きで、f_1, f_2 が次数を保つならば、f は次数を保つ。

これらのことを示せ。

■捩れテンソル積　ここでは次数の加法群 Γ は $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Z}_2$ とする。$E=\oplus_p E_p, E'=\oplus_p E'_p$ を次数付き代数とする。テンソル積 $E\otimes E'=\oplus_{r\in\Gamma}\left(\oplus_{p+p'=r}E_p\otimes E'_{p'}\right)$ に通常とは異なる新たな乗法 $\hat{\mu}:(E\otimes E')\otimes(E\otimes E')\to E\otimes E'$ を定義して、これを次数付き代数にすることができる。すなわち $(E\otimes E')\otimes(E\otimes E')\simeq E\otimes E'\otimes E\otimes E'$ を

$$
\begin{aligned}
E\otimes E'\otimes E\otimes E' &\simeq E\otimes\left(\oplus_{p'}E'_{p'}\right)\otimes\left(\oplus_q E_q\right)\otimes E'\\
&\simeq \oplus_{p',q}\left(E\otimes E'_{p'}\otimes E_q\otimes E'\right)
\end{aligned}
$$

のように直和分解し、$\hat{\mu}$ を $E\otimes E'_{p'}\otimes E_q\otimes E'$ 上で $\hat{\mu}(x\otimes x'\otimes y\otimes y')=(-1)^{p'q}xy\otimes x'y'$ を満たす線形写像として定義する。この新たな乗法 $\hat{\mu}$ を備えた代数を $E\hat{\otimes}E'$ と書いて、次数付き代数 E と E' の**捩れテンソル積 (twisted tensor product)** と呼ぶ。定義により、$E\hat{\otimes}E'$ において、

$$(x\otimes x')\cdot(y\otimes y')=(-1)^{p'q}xy\otimes x'y'\quad (x'\in E'_{p'}, y\in E_q)$$

が成り立つ。捩れテンソル積

$$E\hat{\otimes}E'=\oplus_{r\in\Gamma}\left(\oplus_{p+p'=r}E_p\otimes E'_{p'}\right)$$

は次数付き代数である。

E, E' が結合的ならば $E\hat{\otimes}E'$ は結合的、E, E' が単位的ならば $E\hat{\otimes}E'$ は $1_E\otimes 1_{E'}$ を乗法単位元として単位的である。

命題 3.8. $\Gamma=\mathbb{Z},\mathbb{Z}_2$ とし、E, E', E'' を K 上の Γ 型の次数付き代数とする。このとき、ベクトル空間としての自然な同型

$$
\begin{aligned}
&(E\hat{\otimes}E')\hat{\otimes}E''\to E\hat{\otimes}(E'\hat{\otimes}E''),\\
&K\hat{\otimes}E\to E,\\
&E\hat{\otimes}K\to E
\end{aligned}
$$

は、いずれも次数付き代数の同型である。

しかしベクトル空間としての “自然な” 同型 $E \hat{\otimes} E' \to E' \hat{\otimes} E, x \otimes x' \mapsto x' \otimes x$ は次数付き代数の同型にならないことに注意する。そこで線形写像

$$\hat{\varphi} : E \hat{\otimes} E' \to E' \hat{\otimes} E$$

を $\hat{\varphi}(x \otimes x') = (-1)^{pp'} x' \otimes x$ ($x \in E_p, x' \in E'_{p'}$) により定義すると、$\hat{\varphi}$ は線形同型で、これが次数付き代数の同型になっていることが分かる。$\hat{\varphi}$ を**捩れ同型**と呼ぶ。

捩れテンソル積の普遍写像性質を述べよう。

命題 3.9. $E = \oplus_p E_p, E' = \oplus_{p'} E'_{p'}$ を Γ 型の次数付き代数とし、これらは単位的・結合的と仮定する。このとき命題 3.2 で述べた写像 θ, θ' は次数を保ち、任意の $x \in E_p, x' \in E'_{p'}$ に対して $\theta(x)\theta'(x') = (-1)^{pp'}\theta'(x')\theta(x)$ を満たす。

さらに F を任意の他の Γ 型の次数付き代数で、これも単位的・結合的と仮定する。$f : E \to F, f' : E' \to F$ を次数を保つ単位的・準同型とし、任意の $x \in E_p, x' \in E'_{p'}$ に対して $f(x)f'(x') = (-1)^{pp'} f'(x')f(x)$ を満たすものとする。このとき次数を保つ代数準同型 $g : E \hat{\otimes} E' \to F$ で $f = g \circ \theta, f' = g \circ \theta'$ を満たすものが唯一つ存在する。

4　テンソル代数

4.1　テンソル代数とその性質

■テンソル代数の定義　V を体 K 上のベクトル空間とする。

整数 p に対し $\mathrm{T}^p(V)$ を

$$\mathrm{T}^p(V) = \begin{cases} \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} & (p > 0), \\ K & (p = 0), \\ 0 & (p < 0) \end{cases}$$

と定め、

$$\mathrm{T}(V) = \oplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{T}^p(V)$$

とおく。$\mathrm{T}(V)$ における乗法 $\mu : \mathrm{T}(V) \otimes \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$ を次のように定義する：$\mathrm{T}(V) \otimes \mathrm{T}(V) = \oplus_{p,q} (\mathrm{T}^p(V) \otimes \mathrm{T}^q(V))$ と直和分解し、$p, q \geq 0$ ならば $\mu : \mathrm{T}^p(V) \otimes \mathrm{T}^q(V) \to \mathrm{T}(V)$ はカノニカル同型 $\mathrm{T}^p(V) \otimes \mathrm{T}^q(V) \to \mathrm{T}^{p+q}(V) \subset \mathrm{T}(V)$,

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \otimes (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) \mapsto x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q}$$

として定義する。$p < 0$ または $q < 0$ ならばもちろん $\mathrm{T}^p(V) \otimes \mathrm{T}^q(V)$ 上で $\mu = 0$ である。

乗法 μ を備えた代数 $\mathrm{T}(V) = \oplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{T}^p(V)$ を V の**テンソル代数 (tensor algebra)** と呼ぶ。

定義により $\mathrm{T}(V)$ において

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) \cdot (x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q}) = x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q} \quad (x_i \in V)$$

が成り立つ。

■テンソル代数の性質

命題 4.1 (普遍写像性質). 1. $\mathrm{T}(V)$ は単位的・結合的代数であり、$\mathbb{Z}$ 型の次数付き代数である。そして自然な単射 $\alpha : V \to \mathrm{T}(V), x \in V \mapsto x \in V = \mathrm{T}^1(V)$ は線形である。

2. 任意の単位的・結合的代数 F と線形写像 $f : V \to F$ に対して $f = f' \circ \alpha$ となる (下図を可換にする) 単位的準同型 $f' : \mathrm{T}(V) \to F$ が唯一つ存在する。さらに F が $\mathbb{Z}$ 型の次数付き代数 $F = \oplus_{p\in\mathbb{Z}} F_p$ で、$f(V) \subset F_1$ となっているならば、f' は次数付き代数の準同型である。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{T}(V) \arrow[d, "f'"] \\ & F \end{tikzcd}$$

証明 線形写像 $f' : \mathrm{T}(V) \to F$ を各 $\mathrm{T}^p(V)$ 上で次のように定義する：$f'(a) = a1_F$ $(a \in K(= \mathrm{T}^0(V)))$, $f'(x) = f(x)$ $(x \in V(= \mathrm{T}^1(V)))$, $f'(x_1 \otimes x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2)$ $(x_i \in V)$, etc.
この f' が $f = f' \circ \alpha$ を満たす唯一の単位的準同型であることは明らかである。 □

系 4.2. $\alpha : V \to \mathrm{T}(V), \alpha' : V' \to \mathrm{T}(V')$ を自然な単射とする。線形写像 $f : V \to V'$ に対して、$\alpha' \circ f = (\otimes f) \circ \alpha$ を満たす単位的準同型 $\otimes f : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V')$ が唯一つ存在する。$\otimes f$ は次数を保つ。

f が単射ならば $\otimes f$ は単射であり、f が全射ならば $\otimes f$ は全射である。

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "f"'] & \mathrm{T}(V) \arrow[d, "\otimes f"] \\ V' \arrow[r, "\alpha'"'] & \mathrm{T}(V') \end{tikzcd}$$

$\otimes f$ を f **が引き起こすテンソル代数の準同型**と呼ぶ。

次数付き代数の任意の単位的準同型 $f' : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V')$ は唯一つの $f : V \to V'$ に対して引き起こされる準同型である。実際、f' は次数を保つから $f'(V) \subset V'$ で、ゆえに $f : V \to V'$ を f' の V への制限として定義することができる。f は線形写像で、$f' = \otimes f$ であることは明らかである。

付記 上記の命題で「単位的準同型」を「単位的反準同型」に置き換えても主張は成り立つ。ある代数 E への反準同型は E の逆代数 E° への準同型に他ならないから。

■**テンソル代数の係数拡大** V を K 上のベクトル空間、L を K の拡大体とする。$\alpha : V \to \mathrm{T}(V), \alpha' : L \otimes_K V \to \mathrm{T}(L \otimes_K V)$ を自然な単射とし、$\alpha^L : L \otimes_K V \to L \otimes_K \mathrm{T}(V)$ を α の L-線形写像への延長とする。すると単位的 L-準同型 $\varphi : \mathrm{T}(L \otimes_K V) \to L \otimes_K \mathrm{T}(V)$ で $\alpha^L = \varphi \circ \alpha'$ を満たすものが唯一つ存在している。$L \otimes_K \mathrm{T}(V) \simeq \oplus_p L \otimes_K \mathrm{T}^p(V)$ と考えると、φ は

$$\varphi(1 \otimes x) = 1 \otimes x \quad (x \in V)$$

を満たす唯一つの単位的 L-準同型である。

$$\begin{tikzcd} L \otimes_K V \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[dr, "\alpha^L"'] & \mathrm{T}(L \otimes_K V) \arrow[d, "\varphi"] \\ & L \otimes_K \mathrm{T}(V) \end{tikzcd}$$

命題 4.3. φ は次数付き L-代数の同型である。これを自然な同型と呼ぶ。

証明 $L \otimes_K \mathrm{T}(V)$ と α^L が普遍写像性質をもつこと、すなわち、任意の単位的・結合的 L-代数 F と L-線形写像 $f : L \otimes_K V \to F$ に対して、$f = f' \circ \alpha^L$ を満たす単位的 L-準同型 $f' : L \otimes_K \mathrm{T}(V) \to F$ が唯一つ存在することを示せばいいのである。

$\tau : V \to L \otimes_K V, \tau' : \mathrm{T}(V) \to L \otimes_K \mathrm{T}(V)$ をそれぞれ $\tau(x) = 1 \otimes x\ (x \in V), \tau'(x) = 1 \otimes x\ (x \in \mathrm{T}(V))$ で定義される写像とする。$f \circ \tau : V \to F$ は K-線形だから $f \circ \tau = f'' \circ \alpha$ を満たす単位的 K-準同型 $f'' : \mathrm{T}(V) \to F$ が唯一つ存在する。$f' : L \otimes_K \mathrm{T}(V) \to F$ を f'' の L-準同型への延長とする。すなわち $f'' = f' \circ \tau'$ を満たす唯一の L-準同型とする (f' は単位的である)。このとき $f \circ \tau = f'' \circ \alpha = f' \circ \tau' \circ \alpha = f' \circ \alpha^L \circ \tau$ だから $f = f' \circ \alpha^L$ である。このような f' が一意であることも同様にして示せる。

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "f\circ\tau"] \arrow[dd, "\tau"'] & & \mathrm{T}(V) \arrow[dl, "f''"'] \arrow[dd, "\tau'"] \\
& F & \\
L \otimes_K V \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "\alpha^L"'] & & L \otimes_K \mathrm{T}(V) \arrow[ul, "f'"']
\end{tikzcd}$$

□

4.2 共変テンソル代数

■**共変テンソル** $\mathrm{T}(V)$ の次数付き双対空間 $\mathrm{T}(V)^{(*)} = \oplus_p (\mathrm{T}^p(V))^*$ が幾何学では重要である。$\mathrm{T}(V)^{(*)}$ の元を V 上の共変テンソルといい、とくに $(\mathrm{T}^p(V))^*$ の元を V 上の**共変 p-テンソル (covariant p-tensor)** と呼ぶ。

$f \in \mathrm{T}^p(V)^*$ と $g \in \mathrm{T}^q(V)^*$ の "テンソル積" $f \otimes' g \in \mathrm{T}^{p+q}(V)^*$ を

$$\langle f \otimes' g\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q} \rangle = \langle f\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \rangle \cdot \langle g\,,\, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q} \rangle$$

により定義する。一般の $f, g \in \mathrm{T}(V)^{(*)}$ に対しては、

$$f \otimes' g = \textstyle\sum_{p,q} f_p \otimes' g_q$$

により定義する。ここで $f = (f_p), g = (g_p)$。すると $\mathrm{T}(V)^{(*)}$ は次数付き代数になる。これを本書では V 上の**共変テンソル代数**であると定義する。共変テンソル代数は明らかに単位的結合的代数である。

> 付記 元々は有限次元の V に対して $\mathrm{T}(V^*) \simeq \mathrm{T}(V)^{(*)}$ の元は、その座標成分が座標系 (基底) の変換に際して座標系の変換に「共傾に」変換されることから「共変」の名がついている。カテゴリー論でいうところの共変ではない。因に $\mathrm{T}(V)$ の元は座標系の変換に「反傾に」変換されるので「反変」テンソルと呼ばれる。

$\mathrm{T}(V)^{(*)}$ の各成分 $(\mathrm{T}^p(V))^*$ は $\mathrm{L}(V^p\,;K)$ に同型である。すなわち、$f \in (\mathrm{T}^p(V))^*$ を $f \in \mathrm{L}(V^p\,;K)$ と見なすことができる：

$$\langle f\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \rangle = f(x_1, \cdots, x_p).$$

例 4.1. 実ベクトル空間 V の計量 $g \in \mathrm{L}(V^2\,;\mathbb{R})$ は、共変 2-テンソルと見ることができる。そう見なすと、

$$\langle g\,,\, x \otimes y \rangle = g(x\,,\,y) \quad (x, y \in V).$$

■$\mathrm{T}(V^*)$ から $\mathrm{T}(V)^{(*)}$ への自然な単射　$\varphi : \mathrm{T}(V^*) \to \mathrm{T}(V)^{(*)}$ を恒等写像 $V^* \to V^*(\subset \mathrm{T}(V)^{(*)})$ が引き起こす単位的準同型とする：$\varphi(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p) = \xi_1 \otimes' \cdots \otimes' \xi_p$。

φ は次数を保つから、φ を 0 次の斉次双一次形式 $\varphi : \mathrm{T}(V^*) \times \mathrm{T}(V) \to K$ と見なすことができる。そう見なすと、

$$\begin{aligned}&\varphi(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p) = \langle\, \varphi(\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p)\, ,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \,\rangle \\ &= \langle\, \xi_1 \otimes' \cdots \otimes' \xi_p \,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \,\rangle = \textstyle\prod_{i=1}^{p} \langle\, \xi_i \,,\, x_i \,\rangle\end{aligned}$$

が成り立つ。

φ の各成分 $\varphi_p : \mathrm{T}^p(V^*) \to \mathrm{T}^p(V)^{(*)}$ は命題 2.10 で述べた「自然な単射」${V_1}^* \otimes \cdots \otimes {V_p}^* \to \mathrm{L}(\,V_1, \cdots, V_p\,;\,K\,)$ の $V_1 = \cdots = V_p = V$ とした場合に他ならないから単射である。ゆえに φ は単射である。$\dim V < \infty$ ならば φ は双射、つまり次数付き代数の同型である。

φ は単射だから、$\xi \in \mathrm{T}(V^*)$ と $\varphi(\xi) \in \mathrm{T}(V)^{(*)}$ を同一視して $\mathrm{T}(V^*) \subset \mathrm{T}(V)^{(*)}$ と見なすことができる。すると、$\xi_i \in V^*$ に対して $\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p \in \mathrm{T}(V^*)$ と $\xi_1 \otimes' \cdots \otimes' \xi_p \in \mathrm{T}(V)^{(*)}$ を区別する必要はなくなるから、一般に $f, g \in \mathrm{T}(V)^{(*)}$ の積 $f \otimes' g$ を $f \otimes g$ と書いてしまっても問題はない。だから以下では、混同のおそれがなければ、$f \otimes' g$ とは書かず、$f \otimes g$ と書く。

さて、上の議論において V を V^* で置き換えると、自然な単射 $\varphi' : \mathrm{T}(V^{**}) \to \mathrm{T}(V^*)^{(*)}$ があることになる。φ' の $\mathrm{T}(V)$ への制限 φ'' はもちろん単射である。ところが定義から明らかに φ'' は ${}^{\mathrm{t}}\varphi$ に等しい。すなわち φ も ${}^{\mathrm{t}}\varphi$ も単射で、したがって、φ は双一次形式として非退化である。

■引き戻し　$\lambda : V \to W$ を線形写像とする。ここでは λ が引き起こす準同型 $\otimes\lambda : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(W)$ を λ と略記し、$\otimes\lambda$ の次数付き双対 $(\otimes\lambda)^{(*)}$ を λ^* と略記する。次数付き双対の定義により

$$\langle\, \lambda^* f \,,\, x \,\rangle = \langle\, f \,,\, \lambda x \,\rangle \quad (f \in \mathrm{T}(W)^{(*)}, x \in \mathrm{T}(V))$$

が成り立つ。λ^* は λ による**引き戻し (pull-back)** と呼ばれる。

定義から明らかに、任意の $f \in (\mathrm{T}^p(V))^*$, $x_i \in V$ に対して

$$\langle\, \lambda^* f \,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \,\rangle = \langle\, f \,,\, \lambda x_1 \otimes \cdots \otimes \lambda x_p \,\rangle$$

あるいは

$$(\lambda^* f)(x_1, \cdots, x_p) = f(\lambda x_1, \cdots, \lambda x_p)$$

が成り立つ。

命題 4.4. $\lambda : V \to W$ を線形写像、$\varphi : \mathrm{T}(V^*) \to \mathrm{T}(V)^{(*)}$, $\varphi' : \mathrm{T}(W^*) \to \mathrm{T}(W)^{(*)}$ を自然な単位的準同型とする。このとき、

$$\varphi \circ \lambda^* = \lambda^* \circ \varphi'$$

が成り立つ。ここで左辺の λ^* は $\lambda^* : W^* \to V^*$ の引き起こす準同型 $\wedge(\lambda^*) : \mathrm{T}(W^*) \to \mathrm{T}(V^*)$ を意味し、右辺の λ^* は λ による引き戻し $(\wedge\lambda)^{(*)} : \mathrm{T}(W)^{(*)} \to \mathrm{T}(V)^{(*)}$ である。

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}(W^*) \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d, "\lambda^*"'] & \mathrm{T}(W)^{(*)} \arrow[d, "\lambda^*"] \\
\mathrm{T}(V^*) \arrow[r, "\varphi"'] & \mathrm{T}(V)^{(*)}
\end{tikzcd}$$

証明 任意の $\eta_i \in W^*, x_i \in V$ に対して、

$$\langle\, \varphi \circ \lambda^*(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_p)\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \,\rangle = \langle\, \varphi(\lambda^*\eta_1 \otimes \cdots \otimes \lambda^*\eta_p)\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \,\rangle$$
$$= \langle\, \lambda^*\eta_1 \otimes' \cdots \otimes' \lambda^*\eta_p\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \,\rangle = \textstyle\prod_i \langle\, \lambda^*\eta_i\,,\, x_i \,\rangle = \prod_i \langle\, \eta_i\,,\, \lambda x_i \,\rangle,$$

一方、

$$\langle\, \lambda^* \circ \varphi'(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_p)\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \,\rangle = \langle\, \varphi'(\eta_1 \otimes \cdots \otimes \eta_p)\,,\, \lambda x_1 \otimes \cdots \otimes \lambda x_p \,\rangle$$
$$= \langle\, \eta_1 \otimes' \cdots \otimes' \eta_p\,,\, \lambda x_1 \otimes \cdots \otimes \lambda x_p \,\rangle = \textstyle\prod_i \langle\, \eta_i\,,\, \lambda x_i \,\rangle.$$

したがって、$\varphi \circ \lambda^* = \lambda^* \circ \varphi'$ である。 □

命題 4.5. λ による引き戻し $\lambda^* : \mathrm{T}(W)^{(*)} \to \mathrm{T}(V)^{(*)}$ は次数付き代数の単位的準同型である。

証明 任意の $f \in \mathrm{T}^p(V)^*, g \in \mathrm{T}^q(W)^*, x_i \in V$ に対して

$$\langle\, \lambda^*(f \otimes g)\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q} \,\rangle = \langle\, f \otimes g\,,\, \lambda x_1 \otimes \cdots \otimes \lambda x_{p+q} \,\rangle$$
$$= \langle\, f\,,\, \lambda x_1 \otimes \cdots \otimes \lambda x_p \,\rangle \cdot \langle\, g\,,\, \lambda x_{p+1} \otimes \cdots \otimes \lambda x_{p+q} \,\rangle$$
$$= \langle\, \lambda^* f\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \,\rangle \cdot \langle\, \lambda^* g\,,\, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_{p+q} \,\rangle$$
$$= \langle\, \lambda^* f \otimes \lambda^* g\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_{p+q} \,\rangle$$

が成り立つから、$\lambda^*(f \otimes g), \lambda^* f \otimes \lambda^* g$ は $\mathrm{T}^{p+q}(V)$ 上で一致する。どちらも $p+q$ 次の斉次元だから、$\mathrm{T}^r(V)$ $(r \neq p+q)$ 上では 0 である。ゆえに $\lambda^*(f \otimes g) = \lambda^* f \otimes \lambda^* g$ が成り立つ。したがって、一般の $f, g \in \mathrm{T}(V)^{(*)}$ に対しても $\lambda^*(f \otimes g) = \lambda^* f \otimes \lambda^* g$ が成り立つ。 □

例 4.2. $(V, g), (V', g')$ を実計量ベクトル空間とする。線形写像 $f : V \to V'$ は $g(x, y) = g'(f(x), f(y))$ $(x, y \in V)$ を満たすとき等長 (isometry) であるという (例 1.2 を参照)。f が等長であるというのは、言い換えてみると

$$f^* g' = g$$

ということである。実際、これは式 $\langle\, f^* g'\,,\, x \otimes y \,\rangle = \langle\, g'\,,\, f(x \otimes y) \,\rangle = \langle\, g'\,,\, f(x) \otimes f(y) \,\rangle$ を考えてみれば明らかである。

■テンソル代数上の斉次双一次形式 $f : V \times W \to K$ を双一次形式とする。$f : V \to W^*$ と考えると、f は次数付き代数の単位的準同型 $\otimes f : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(W^*) (\subset \mathrm{T}(W)^{(*)})$ を引き起こす。$\otimes f$ は $\mathrm{T}(V) \times \mathrm{T}(W)$ 上の 0 次双一次形式と見なすことができる。そう見なすと、

$$(\otimes f)(\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p\,,\, y_1 \otimes \cdots \otimes y_p \,) = \textstyle\prod_{i=1}^p f(\, x_i\,,\, y_i \,)$$

が成り立つ。実際、$\xi_i = f(x_i)$ とおくと

$$(\otimes f)(\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p\,,\, y_1 \otimes \cdots \otimes y_p \,) = \langle\, (\otimes f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)\,,\, y_1 \otimes \cdots \otimes y_p \,\rangle$$
$$= \langle\, \xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p\,,\, y_1 \otimes \cdots \otimes y_p \,\rangle = \textstyle\prod_i \langle\, \xi_i\,,\, y_i \,\rangle = \prod_i f(\, x_i\,,\, y_i \,).$$

f の転置 ${}^{\mathrm{t}}f : W \times V \to K$ についても、これを ${}^{\mathrm{t}}f : W \to V^*$ と考えると、$\otimes {}^{\mathrm{t}}f : \mathrm{T}(W) \to \mathrm{T}(V^*) (\subset \mathrm{T}(V)^{(*)})$ は双一次形式 $\mathrm{T}(W) \times \mathrm{T}(V) \to K$ と考えられる。

$$(\otimes {}^{\mathrm{t}}f)(\, y_1 \otimes \cdots \otimes y_p\,,\, x_1 \otimes \cdots \otimes x_p \,) = \textstyle\prod_{i=1}^p {}^{\mathrm{t}}f(\, y_i\,,\, x_i \,) = \prod_{i=1}^p f(\, x_i\,,\, y_i \,),$$

$$ {}^{\mathrm{t}}(\otimes f)\,(\,y_1\otimes\cdots\otimes y_p\,,\,x_1\otimes\cdots\otimes x_p\,) = (\otimes f)\,(\,x_1\otimes\cdots\otimes x_p\,,\,y_1\otimes\cdots\otimes y_p\,) = \textstyle\prod_i f\,(\,x_i\,,\,y_i\,) $$

だから $\otimes({}^{\mathrm{t}}f) = {}^{\mathrm{t}}(\otimes f)$ が成り立つ。よって f が非退化ならば、$\otimes f$ は非退化であり、f が対称ならば、$\otimes f$ は対称である。

$\dim V = \dim W < \infty$ かつ f が非退化の場合を考える。このとき $f : V \to W^*$ は双射だから、逆写像 $f^{-1} : W^* \to V(\simeq V^{**})$ が存在する。f^{-1} は $W^*\times V^*$ 上の非退化双一次形式である。$\otimes(f^{-1}) : \mathrm{T}(W^*) \to \mathrm{T}(V)(\simeq \mathrm{T}(V^*)^{(*)})$ は $\mathrm{T}(W^*)\times\mathrm{T}(V^*)$ 上の 0 次双一次形式と考えられる。$f\circ f^{-1} = \mathrm{id}$, $f^{-1}\circ f = \mathrm{id}$ だから $\otimes(f^{-1}) = (\otimes f)^{-1}$ が成り立つ。

例 4.3. 実ベクトル空間 V の計量 g は $\mathrm{T}(V)$ に計量 $\otimes g$ を引き起こす。

練習問題 4.1. (興味のある人だけやってみる)

g が正定値ならば、$\otimes g$ は正定値である。

また V が有限次元、g の符号を (s,t) とすると、$\otimes g$ の $\mathrm{T}^p(V)$ 上での符号 (s_p,t_p) は $s_p = \frac{1}{2}\{(s+t)^p + (s-t)^p\}$, $t_p = \frac{1}{2}\{(s+t)^p - (s-t)^p\}$ である。以上のことを証明せよ。

■内部積 (I)　$\mathrm{T}(V)^{(*)}$ と $\mathrm{T}(V)$ の自然な内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を考える。任意の $x\in\mathrm{T}(V)$ に対して、$i_x = {e_x}^{(*)}$ とおくと、

$$ \langle\, i_x f\,,\,y\,\rangle = \langle\, f\,,\,e_x y\,\rangle \quad (x,y\in\mathrm{T}(V), f\in\mathrm{T}(V)^{(*)}) $$

が成り立つ。ゆえに $x\in V$, $x_i\in V$ と $f\in(\mathrm{T}^p(V))^*$ に対して、

$$ \langle\, i_x f\,,\,x_2\otimes\cdots\otimes x_p\,\rangle = \langle\, f\,,\,x\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_p\,\rangle $$

あるいは

$$ (i_x f)(x_2,\cdots,x_p) = f(x,x_2,\cdots,x_p) $$

が成り立つ。

次数付き代数の一般論で述べたように対応 $x\in\mathrm{T}(V)\mapsto i_x\in\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,\mathrm{T}(V)^{(*)}\,)$ は次数を逆にする単位的反準同型である。

命題 4.6. 任意の $x\in\mathrm{T}(V)$ に対して $i_x\in\mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,\mathrm{T}(V)^{(*)}\,)$ は $\mathrm{T}(V^*)$ を不変にする。

証明 $f = \xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_p$ $(\xi_i\in V^*)$ ならば、

$$ \begin{aligned} &\langle\, i_x(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_p)\,,\,x_2\otimes\cdots\otimes x_p\,\rangle = \langle\,\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_p\,,\,x\otimes x_2\otimes\cdots\otimes x_p\,\rangle \\ &= \langle\,\xi_1\,,\,x\,\rangle\langle\,\xi_2\,,\,x_2\,\rangle\cdots\langle\,\xi_p\,,\,x_p\,\rangle \\ &= \langle\,\xi_1\,,\,x\,\rangle\langle\,\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_p\,,\,x_2\otimes\cdots\otimes x_p\,\rangle, \end{aligned} $$

ゆえに

$$ i_x(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_p) = \langle\,\xi_1\,,\,x\,\rangle\xi_2\otimes\cdots\otimes\xi_p. $$

これは i_x が $\mathrm{T}^p(V^*)$ を $\mathrm{T}^{p-1}(V^*)$ のなかに写すことを示している。すなわち i_x は $\mathrm{T}(V^*)$ を不変にする。$\mathrm{T}(V)$ は V から生成されるから、任意の $x\in\mathrm{T}(V)$ に対して i_x は $\mathrm{T}(V^*)$ を不変にする。 □

次の式は上の証明の中で既に示されている：

$$ i_{x_1\otimes\cdots\otimes x_p}(\xi_1\otimes\cdots\otimes\xi_p) = \langle\,\xi_1\,,\,x_1\,\rangle\cdots\langle\,\xi_p\,,\,x_p\,\rangle\,\xi_{p+1}\otimes\cdots\otimes\xi_q \quad (x_i\in V,\xi_i\in V^*, p\le q). $$

命題 4.7. $\lambda : V \to W$ を線形写像とし、$\lambda^* : \mathrm{T}(W)^{(*)} \to \mathrm{T}(V)^{(*)}$ を λ による引き戻しとする。これも次数付き代数の一般論で既に述べたことだが、引き戻しと内部積のあいだに次の関係がある：

$$i_x(\lambda^* f) = \lambda^*(i_{\lambda(x)} f) \quad (x \in \mathrm{T}(V), f \in \mathrm{T}(W)^{(*)}).$$

証明 任意の $y \in \mathrm{T}(V)$ に対して

$$\begin{aligned} &\langle\, i_x(\lambda^* f)\, ,\, y \,\rangle = \langle\, \lambda^* f\, ,\, x \cdot y \,\rangle = \langle\, f\, ,\, \lambda(x \cdot y) \,\rangle \\ &= \langle\, f\, ,\, \lambda(x) \cdot \lambda(y) \,\rangle = \langle\, i_{\lambda(x)} f\, ,\, \lambda(y) \,\rangle = \langle\, \lambda^*(i_{\lambda(x)} f)\, ,\, y \,\rangle. \end{aligned}$$

□

■内部積 (II)　次に $f \in \mathrm{T}^p(V)^*$ に対して、線形写像 $i_f : \mathrm{T}(V) \to \mathrm{T}(V)$ を

$$i_f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_q) = \begin{cases} f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_p)\, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_q & (p \leq q) \\ 0 & (p > q) \end{cases}$$

により定義する。ただし $p < 0$ ならば $i_f = 0$ とする。一般の $f = (f_p) \in \mathrm{T}(V)^{(*)}$ に対しては $i_f = \sum_p i_{f_p}$ とする。このとき、

$$\langle\, e_f g\, ,\, x \,\rangle = \langle\, g\, ,\, i_f x \,\rangle \quad (f, g \in \mathrm{T}(V)^{(*)}, x \in \mathrm{T}(V))$$

の成り立つことが確かめられる。すなわち、任意の $f \in \mathrm{T}(V)^{(*)}$ に対して $\mathrm{T}(V)$ において f による右内部積を定義することができて、$i_f x$ が x の f による右内部積である。

対応 $f \in \mathrm{T}(V)^{(*)} \mapsto i_f \in \mathrm{L}_{\mathrm{gr.}}(\,\mathrm{T}(V)\,)$ は次数を逆にする単位的反準同型である。

i_f の定義から次は明らかである。

$$i_{\xi_1 \otimes \cdots \otimes \xi_p}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_q) = \langle\, \xi_1\, ,\, x_1 \,\rangle \cdots \langle\, \xi_p\, ,\, x_p \,\rangle\, x_{p+1} \otimes \cdots \otimes x_q \quad (\xi_i \in V^*, x_i \in V, p \leq q)$$

(つづく)

参考文献

[1] ブルバキ 「数学原論 代数 第 9 章」 東京図書

[2] 堀田良之 「代数入門 - 群と加群」 裳華房

[3] 横田一郎 「群と表現」 裳華房

[4] M.F. Atiyah, R. Bott, A. Shapiro. *Clifford modules*. Topology 3, Suppl.1 (1964)

[5] N. Bourbaki. *Éléments de Mathématique, Algèbre* Ch.1-3. Springer

[6] C. Chevalley. *The algebraic theory of spinors*, *Collected works of Claude Chevalley*. Springer

[7] C. Chevalley. *The construction and study of certain important algebras, Collected works of Claude Chevalley*. Springer

[8] J. Gallier. *Clifford algebras, Clifford groups, and a generalization of the quaternions*. http://www.cis.upenn.edu/ jean/

[9] H.B. Lawson,Jr. and M.-L. Michelsohn. *Spin geometry*. Princeton

[10] A. Vistoli. *Notes on Clifford algebras, spin groups and triality*. http://homepage.sns.it/vistoli/