射影幾何学の要点

木原浩貴

2008 年 3 月 29 日

概要

はじめに必要な線型代数の知識を整理し、ベクトル空間から射影空間を定義する。

射影空間の一般論において、射影幾何学の基本定理を述べ、これを証明する。

双対空間を定義し、双対性により幾何的対象の「含む」「含まれる」の関係が逆転する現象に触れる。

アフィン空間を定義し、射影空間との関係を論ずる。ただこの節は他からやや独立している。

後半では平面射影幾何に議論の的を絞って、幾何的射影変換、射影と背景写像を定義する。また背景写像を使って諸定理 (デザルグ、パップス) を証明する。

最後に実射影平面において射影変換が幾何的射影変換のすべてを尽くしているという定理を証明する。

1　線形代数の復習

■双対空間、直交補空間　以下で、$V, W, \ldots$ は体 K 上のベクトル空間とする。とくに断らないかぎり、これらは有限次元と仮定する。V^* で V の**双対空間**(V 上の一次形式全体のつくるベクトル空間) を記す。$x \in V, y^* \in V^*$ に対し、$\langle x,\ y^* \rangle = \langle y^*,\ x \rangle \overset{\mathrm{def}}{=} y^*(x)$ と書く。部分空間 $V_1 \subset V$ に対し、**直交補空間**は

$$V_1^{\perp} = \{ y^* \in V^* |\ \langle y^*,\ x \rangle = 0 \ \text{ for all } x \in V_1 \}$$

で定義される V^* の部分空間 $V_1^{\perp}$ である。

V は有限次元だから、V^{**} と V とは対応 $x \in V \mapsto x^{**} \in V^{**}$ ($x^{**}(y^*) \overset{\mathrm{def}}{=} y^*(x)$) により同一視され、$V_1^{\perp\perp} = V_1$ が成り立つ。

■双対写像、逆双対写像　線形写像 $f : V \longrightarrow W$ に対し、f の**双対写像**は $\langle x,\ f^*(y^*) \rangle = \langle y^*,\ f(x) \rangle$ $(x \in V, y^* \in W^*)$ で定義される線形写像 $f^* : W^* \longrightarrow V^*$ である。任意の $f : V \longrightarrow W$, $g : U \longrightarrow V$ に対し、$(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$, $f^{**} = f$ が成り立つ。とくに f が線形同型 $V \overset{\sim}{\longrightarrow} W$ の場合、$(f^*)^{-1}$ が存在し、それは $(f^{-1})^*$ に等しい。このとき、$f^\dagger \overset{\mathrm{def}}{=} (f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$ で定義される写像 $f^\dagger : V^* \to W^*$ を f の**逆双対 (写像)** と呼ぶ。定義により

$$\left\langle f(x),\ f^\dagger(y^*) \right\rangle = \langle x,\ y^* \rangle \quad (x \in V, y^* \in V^*)$$

である。

任意の $f : V \overset{\sim}{\longrightarrow} W$, $g : U \overset{\sim}{\longrightarrow} V$ に対し、$(f \circ g)^\dagger = f^\dagger \circ g^\dagger$, $(\mathrm{id}_V)^\dagger = \mathrm{id}_{V^*}$, $(f^{-1})^\dagger = (f^\dagger)^{-1}$, $f^{\dagger\dagger} = f$ が成り立つ。

命題 1.1. $f : V \overset{\sim}{\longrightarrow} W$, $V_1 \subset V$ (部分空間) とすると

$$f^\dagger(V_1^{\perp}) = (f(V_1))^{\perp}$$

である。

■双一次形式、内積　線型写像 $f : V \longrightarrow V^*$ は V 上の**双一次形式**を表す。じっさい、

$$(x,\ y)_f \overset{\mathrm{def}}{=} \langle x,\ f(y) \rangle$$

と定義すると、$(x,\ y)_f$ は双一次形式になり、逆にすべての双一次形式はこの形に表される (f は一意に決まる)。$(x, y)_f = (y, x)_{f^*}$ が成り立ち、$f = f^*$ のとき $(x,\ y)_f$ は**対称**に、$f = -f^*$ のとき $(x,\ y)_f$ は**反対称**になる。

また $f : V \overset{\sim}{\longrightarrow} V^*$ ならば、$f^* : V \overset{\sim}{\longrightarrow} V^*$ であり、このとき $(x, y)_f$ は**非退化**であると言われる。f が非退化のとき、$f = f^*$ (対称) は $f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f = 1$ と同値であり、$f = -f^*$ (反対称) は $f \circ f^\dagger = f^\dagger \circ f = -1$ と同値である。

非退化な対称双一次形式のことを V の**内積**と呼ぶ。例えば、$(x,\ y)_g = \sum_i x_i y_i$ で定義される $g : K^n \longrightarrow (K^n)^*$ は K^n の内積である。ここで $\sum_i$ は $i = 1, \ldots, n$ 全体にわたる和を意味する。f が V の内積のとき、$f^\dagger = f^{-1}$ は V^* の内積である。内積の指定されたベクトル空間を内積ベクトル空間と呼ぶ。以下では、K^n, $(K^n)^*$ はそれぞれ g, $g^\dagger$ が指定された内積ベクトル空間と考える。

■**基と双対基**　線形同型 $e : K^n \xrightarrow{\sim} V$ は V の **(順序) 基**を表す。じっさい、$e_1 = e(1,0,0,\dots)$, $e_2 = e(0,1,0,\dots)$, $\dots$ と定義すると、$\{e_1, e_2, \dots\}$ は V の基である。$x = e(x_1 \dots x_n)$ ならば $(x_1 \dots x_n)$ は基 e に関する x の**成分**と呼ばれる。V の基 e に対し、その**双対基**は $e^\times \overset{\text{def}}{=} e^\dagger \circ g$ で定義される V^* の基 $e^\times$ である。(“双対” 基と呼んだが写像の意味での双対ではない。写像としての双対は e^* である。)

明らかに $e^{\times\times} = e$ が成り立つ。

命題 1.2. 任意の基 e に関する $x \in V$ の成分を $x_1 \dots x_n$ とし、e の双対基に関する $y^* \in V^*$ の成分を $y_1 \dots y_n$ とすると

$$\langle x,\ y^* \rangle = \sum_i x_i y_i$$

が成り立つ。

証明 $x = e(x_1 \dots x_n)$, $y^* = e^\times(y_1 \dots y_n) = e^\dagger \circ g(y_1 \dots y_n)$ だから

$$\begin{aligned}\langle x,\ y^* \rangle &= \left\langle e(x_1 \dots x_n),\ e^\dagger \circ g(y_1 \dots y_n) \right\rangle \\ &= \langle x_1 \dots x_n,\ g(y_1 \dots y_n) \rangle = (x_1 \dots x_n,\ y_1 \dots y_n)_g = \sum_i x_i y_i\end{aligned}$$

∎

2　射影空間と射影変換

■**射影空間**　$*V \overset{\mathrm{def}}{=} V \setminus \{0\}$ とし、$*V$ を同値関係 $x \sim y \Leftrightarrow x = \lambda y$ ($\exists \lambda \neq 0, \in K$) で割った商集合を $[V]$ と書いて、これを V で定義される**射影空間**と呼ぶ。

$$[V] \overset{\mathrm{def}}{=} (*V)/\sim$$

以下、射影空間は $M, N, \ldots$ などの記号で表し、元になっているベクトル空間を明示する必要のあるときは、$M = [V]$ などで表す。また $x \in *V$ に対し、x の同値類を $[x]$ と書く。写像 $x \in *V \mapsto [x] \in M$ を π と書いたりすることもある。

射影空間 $M = [V]$ の**次元**$\dim M$ を $\dim M \overset{\mathrm{def}}{=} \dim V - 1$ で定義する。

-1 次元部分空間は空集合であり、0 次元射影空間は唯一つの元 $[a]$ から成る集合 $\{[a]\} = [Ka]$ で、これは**点**と呼ばれる。1 次元射影空間は **(射影) 直線**と呼ばれ、2 次元射影空間は **(射影) 平面**と呼ばれる。

練習問題 2.1. 直線は少なくとも 3 個の点を含む。
平面は少なくとも 7 個の点を含む。

■**射影幾何、束**　$M = [V]$, $M_1 = [V_1]$ を射影空間とする。$V_1 \subset V$ ならば明らかに $M_1 \subset M$ が成り立つ。このとき、M_1 を M の**部分空間**と呼ぶ。

与えられた射影空間 $M = [V]$ の部分空間全部から成る集合を $\mathcal{L}(M)$ と書いてこれを M 上の**射影幾何**という。$\mathcal{L}(M)$ には以下のように結びと交わりと呼ばれる二項演算が定義される。

$M_i = [V_i] \in \mathcal{L}(M)$ $(i = 1, 2)$ に対し、**結び** $M_1 \vee M_2$ を $M_1 \vee M_2 \overset{\mathrm{def}}{=} [V_1 + V_2]$ で、**交わり** $M_1 \wedge M_2$ を $M_1 \wedge M_2 \overset{\mathrm{def}}{=} [V_1 \cap V_2](= [V_1] \cap [V_2])$ で定義する。$M_1 \vee M_2$ は M_1 と M_2 を含む最小の部分空間であり、$M_1 \wedge M_2$ は M_1 と M_2 に含まれる最大の部分空間である。

命題 2.1. M_1, M_2 を M の部分空間とすると

$$\dim(M_1 \vee M_2) + \dim(M_1 \wedge M_2) = \dim M_1 + \dim M_2$$

が成り立つ。特に $M_1 \wedge M_2 = \emptyset$ ならば、

$$\dim(M_1 \vee M_2) = \dim M_1 + \dim M_2 + 1$$

が成り立つ。

命題 2.2. $M_1 \subset M_2, \dim M_1 = \dim M_2$ ならば $M_1 = M_2$ が成り立つ。

証明 $M_i = [V_i]$ とすると、仮定から $V_1 \subset V_2$. $\dim V_1 = \dim V_2 < \infty$ だから $V_1 = V_2$ でなければならない。よって $M_1 = M_2$. ▮

定理 2.3. A, B を異なる二点とすると、$A \vee B$ は A, B を通る唯一の直線である。

証明 $A \vee B$ が A, B を通る直線であるのは明らか。一意性を示すには、l を $A, B \subset l$ なる直線とすると、最小性から $A \vee B \subset l$ で、$\dim A \vee B = \dim l = 1$ なので $A \vee B = l$ となる。 ▮

定理 2.4. M 上の異なる二直線 l, m はたかだか一点で交わる。
もし M が射影平面ならば、l, m は一点で交わる。

証明 l, m が二点で交われば、定理 2.3 から $l = m$ である。よって $l \neq m$ であれば、$\dim(l \wedge m) \leq 0$. すなわち、$l \wedge m$ は $\emptyset$ かまたは点。
$\dim M = 2$ の場合、$\dim(l \vee m) \leq 2$ 。よって

$$\dim(l \wedge m) = 2 - \dim(l \vee m) \geq 0.$$

ここで命題 2.1 の等式を使った。したがって、$\dim(l \wedge m) = 0$ となって、$l \wedge m$ は点。 ▮

■一般の位置 $n \geq 1$ とする。$n+1$ 個の点 $A_1, \ldots, A_{n+1}$ は

$$\dim(A_1 \vee \cdots \vee A_{n+1}) = n$$

を満たすとき、互いに**独立**であるという。$A_i = [a_i]$ とすれば、これはベクトルの集合 $a_1, \ldots, a_{n+1}$ が一次独立ということである。

練習問題 2.2. 二点 A, B が互いに独立であることは言い替えると、$A \neq B$ ということである。三点 A, B, C が互いに独立であることは言い替えると、A, B, C が**共線**でない (同一直線上にない) ということである。以上のことを確認せよ。

n 次元射影空間 M の点 $A_1, A_2, \ldots$ はそのなかの任意の $n+1$ 個の点が互いに独立なとき、M のなかで**一般の位置**にあるという。

■射影写像 $M = [V], N = [W]$ を射影空間とし、$f : V \to W$ を $\ker f = \{0\}$ (f は単射) なる線形写像とする。

このとき、$\varphi : M \to N$, $\varphi([x]) = [f(x)]$ $(x \in *V)$ は well-defined である。φ を $[f]$ と書いて、これを M から N への**射影写像**という。f が線形同型のときは、$\varphi = [f]$ は双射で、このときは**射影変換**とも呼ばれる。

命題 2.5. $M_1 = [V_1]$, $\varphi = [f]$ とすると $\varphi(M_1) = [f(V_1)]$ が成り立つ。

じっさい、

$$\begin{aligned}\varphi(M_1) &= \{\varphi([x]) \mid [x] \in M_1\} \\ &= \{[f(x)] \mid x \in *V_1\} \\ &= \{[y] \mid y \in f(*V_1) = *f(V_1)\} \\ &= \pi(*f(V_1)) = [f(V_1)].\end{aligned}$$

単射線形写像 $f : V \to W$, $g : U \to V$ に対し、$f \circ g : U \to W$ は単射線形で、$[f \circ g] = [f] \circ [g]$ が成り立つ。$[\mathrm{id}_V] = \mathrm{id}_{[V]}$ は明らかである。$f : V \to W$ が線形同型のときは、逆写像 f^{-1} も線形同型で, $[f]^{-1} = [f^{-1}]$ が成り立つ。$\varphi^{-1} = [f^{-1}]$ を $\varphi = [f]$ の**逆変換**と呼ぶ。

定理 2.6. $[f_1] = [f_2] \Longleftrightarrow f_1 = \lambda f_2$ ($\exists \lambda \neq 0, \in K$) が成り立つ。

$\Longleftarrow$ は明らかであろう。$\Longrightarrow$ を示すのも難しくはないので省略する。

■**標準射影空間、射影枠** $[K^{n+1}]$ は $P^n(K)$ または単に P^n と書かれ、K 上の**標準 n 次元射影空間**と呼ばれる。$M=[V]$ を一般の n 次元射影空間とすると、P^n から M への射影変換 θ は M 上の **(射影) 枠**と呼ばれる。

$P=\theta([x_0,x_1,\ldots,x_n])$ ならば $[x_0,x_1,\ldots,x_n]$ は P の**斉次座標**と呼ばれる。

補題 2.7. n 次元射影空間 M 上に M のなかで一般の位置にある $n+2$ 個の点 $A_1,\ldots,A_{n+2}$ が与えられてあるとき、

$$\begin{aligned}
&\theta([1,0\ldots0])=A_1,\\
&\cdots\\
&\theta([0\ldots0,1])=A_{n+1},\\
&\theta([1,\ldots,1])=A_{n+2}
\end{aligned}$$

を満たす枠 θ が唯一つ存在する。

証明 $M=[V]$, $A_i=[a_i]$ $(i=1\ldots n+2)$ とする。仮定から、$a_1,\ldots,a_{n+2}$ はどの $n+1$ 個をとっても一次独立である。特に $a_1,\ldots,a_{n+1}$ を V の基底に選ぶことができて、

$$a_{n+2}=\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_{n+1}a_{n+1}$$

である。ここで $\lambda_i=0$ なる添字 i があるとするとその a_i を除いた他の $n+1$ 個のベクトルの一次独立性に矛盾するから、すべての添字 i に対して $\lambda_i\neq 0$ であることが分かる。
そこですべての添字 i に対して $\lambda_i=1$ となるように A_i の代表元 a_i を選んでおけば、

$$a_{n+2}=a_1+\cdots+a_{n+1}$$

が成立していることになる。すなわち、線形同型 $f:K^{n+1}\to V$ を

$$\begin{aligned}
&f(1,0\ldots0)=a_1,\\
&\cdots\\
&f(0\ldots,1)=a_{n+1}
\end{aligned}$$

で定義しておくと、$\theta=[f]$ が問題の条件を満たす。
(一意性) $\psi=[g]$ を条件を満たす別の枠とすると、

$$\begin{aligned}
&g(1,0\ldots0)=\lambda_1 a_1,\\
&\cdots\\
&g(0\ldots,1)=\lambda_{n+1}a_{n+1},\\
&g(1,\ldots,1)=\lambda a_{n+2}.
\end{aligned}$$

ここから

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_{n+1}a_{n+1}=\lambda a_1+\cdots+\lambda a_{n+1},$$

$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n+1}=\lambda$ が導かれる。すなわち $g=\lambda f$, $\psi=\theta$. ∎

定理 2.7 の条件を満たす枠 θ を $\Phi(A_1,\ldots,A_{n+2})$ と書く。

定理 2.8 (射影幾何学の基本定理 (一般)). M, M' を n 次元射影空間とし、A_i $(i = 1 \dots n+2)$ を M のなかで一般の位置にある M の $n+2$ 個の点、A'_i $(i = 1 \dots n+2)$ を M' のなかで一般の位置にある M' の $n+2$ 個の点とする。このとき、射影変換 $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M'$ で、すべての添字 i に対して A_i を A'_i に写すものが唯一つ存在する。

証明 M の枠 $\theta = \Phi(A_1, \dots, A_{n+2})$ 及び M' の枠 $\theta' = \Phi(A'_1, \dots, A'_{n+2})$ を考えると、写像 $\varphi = \theta' \circ \theta^{-1}$ が求める射影変換である。

(一意性) φ' を定理の条件を満たす別の射影変換とすると、$\varphi' \circ \theta$ は M' の枠で、これは θ' に等しいことがわかる (補題 2.7 の一意性の主張から)。ゆえに $\varphi' = \varphi$. ▮

■双対射影空間、双対性　射影空間 $M = [V]$ に対し、$M^* = [V^*]$ と書いて、これを M の**双対射影空間**と呼ぶ。V と V^{**} を自然に同一視するのに従って、M と M^{**} を同一視することにする。

$[x] \in M, [y^* \in M^*]$ に対して、関係 $[x] \perp [y^*]$ を

$$[x] \perp [y^*] \Longleftrightarrow \langle x,\ y^* \rangle = 0$$

で定義する。$[x] \perp [y^*]$ は $[x]$ は $[y^*]$ に **'直交する'** と読むことができる。

$M_1 = [V_1]$ を $M = [V]$ の部分空間とする。このとき、$M_1^\dagger = [V_1^\perp]$ と書いて、これを M_1 の**直交補空間**と呼ぶ。定義から明らかに

$$\begin{aligned} M_1^\dagger &= \{[y^*] \in M^* \mid \langle x,\ y^* \rangle = 0 \text{ for all } x \in V_1 (x \neq 0), y^* \neq 0\} \\ &= \{[y^*] \in M^* \mid [x] \perp [y^*] \text{ for all } [x] \in M_1\} \end{aligned}$$

すなわち、直交補空間 M_1^* は M_1 に含まれるすべての点に '直交' する点の集まりである。

また $\mathcal{L}(M)$ から $\mathcal{L}(M^*)$ への写像 $\dagger : M_1 \mapsto M_1^\dagger$ を $\mathcal{L}(M)$ の**双対性**と呼ぶ。M の部分空間 M_1, M_2 に対して $M_1^{\dagger\dagger} = M_1$; $M_1 \subset M_2 \Longrightarrow M_1^\dagger \supset M_2^\dagger$; $(M_1 \wedge M_2)^\dagger = M_1^\dagger \vee M_2^\dagger$; $(M_1 \vee M_2)^\dagger = M_1^\dagger \wedge M_2^\dagger$. が成り立つ。

このように双対性により部分空間のあいだの「含む」「含まれる」「結び」「交わり」の関係は、それぞれ「含まれる」「含む」「交わり」「結び」の関係に反転する。

練習問題 2.3. $n = \dim M = \dim M^*$ とすると

$$\dim M_1 + \dim M_1^\dagger = n - 1$$

■射影変換の双対と逆双対　$\varphi : M \xrightarrow{\sim} N$ を射影変換とし、$\varphi = [f]$, $M = [V]$, $N = [W]$ とする。このとき $\varphi^* \overset{\text{def}}{=} [f^*] : N^* \xrightarrow{\sim} M^*$ を φ の**双対**と呼び、$\varphi^\dagger \overset{\text{def}}{=} [f^\dagger] = [(f^*)^{-1}] : M^* \xrightarrow{\sim} N^*$ を φ の**逆双対**と呼ぶ。φ^*, $\varphi^\dagger$ は well-defined である。

命題 2.9. M の部分空間 M_1 に対して

$$\varphi^\dagger(M_1^\dagger) = (\varphi(M_1))^\dagger$$

が成り立つ。

じっさい、$M_1 = [V_1]$, $\varphi = [f]$, とすると、$\varphi^\dagger = [f^\dagger]$ で、

$$\begin{aligned} \varphi^\dagger(M_1^\dagger) &= [f^\dagger(V_1^\perp)] \\ &= [f(V_1)^\perp] = [f(V_1)]^\dagger = (\varphi(M_1))^\dagger \end{aligned}$$

■**双対枠**　M の枠 $\theta = [e]$ に対して $\theta^\times = [e^\times]$ で定義される M^* の枠 $\theta^\times$ を θ に双対な枠、あるいは θ の**双対枠**と呼ぶ。定義から $\theta^\times = \theta^\dagger \circ \gamma$ $(\gamma = [g])$.

練習問題 2.4.

$$\theta([x_0 \dots x_n]) \perp \theta^\times([y_0^* \dots y_n^*]) \Longleftrightarrow \sum_i x_i y_i^* = 0$$

ここで和は $i = 0 \dots n$ ぜんぶに渡る。

■**射影変換群**　M から M 自身への射影変換を M 上の射影変換という。M 上の射影変換全体の集合は群を作り、これを M 上の**射影変換群**と呼ぶ。

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda \end{bmatrix} : \lambda \in K, \neq 0 \right\}$$

とおくと、H は $GL(n, K)$ の正規部分群で、定理 2.6 により射影変換群は商群 $GL(n, K)/H$ に同型であることが分かる。

3 アフィン空間との関係

この節は他からやや独立しているので、飛ばしても先を読み進めていくことができる。

■アフィン空間 (X, U) は以下のとき、体 K 上の**アフィン空間**と呼ばれる。

1. X は非空集合である。
2. U は K 上のベクトル空間である。
3. 加法群 U が X に作用していて (作用を $(x, a) \in X \times U \mapsto x + a \in X$ と書く)、その作用は自由かつ推移的である (任意の $x, y \in X$ に対して $a \in U$ が唯一つ存在し $x + a = y$ を満たす)。

K 上のアフィン空間 $(X, U), (Y, V)$ に対し、$f = (f_1, f_2)$ は以下のとき、(X, U) から (Y, V) への**アフィン写像**であると呼ばれる。

1. $f_1 : X \to Y$
2. $f_2 : U \to V$ (線形)
3. 任意の $x \in X,\, a \in U$ に対し、$f_1(x + a) = f_1(x) + f_2(a)$ が成り立つ。

我々はしかし混同のおそれがなければ、その簡明さゆえ $f_1(x),\, f_2(a)$ と書くかわりに、それぞれ $f(x),\, f(a)$ と記すことが多い。すると最後の条件は

$$f(x + a) = f(x) + f(a) \quad (x \in X, a \in U)$$

となる。また f が (X, U) から (Y, V) へのアフィン写像であることを記号 $f : (X, U) \to (Y, V)$ で表す。

アフィン写像 $f : (X, U) \to (Y, V),\ g : (Y, V) \to (Z, W)$ に対し、その**合成** $g \circ f$ は $h = (h_1, h_2)$, $h_1 = g_1 \circ f_1,\, h_2 = g_2 \circ f_2$ で定義されるアフィン写像 $h : (X, U) \to (Z, W)$ である。事実、h はアフィン写像の条件を満たす：

$$\begin{aligned} h_1(x + a) &= g_1(f_1(x) + f_2(a)) \\ &= g_1(f_1(x)) + g_2(f_2(a)) = h_1(x) + h_2(a) \end{aligned}$$

例 3.1. K 上のベクトル空間 V に対して、(V, V) は V の V 自身への自明な作用 $V \times V \to V,\, (x, a) \mapsto x + a$ により K 上のアフィン空間になる。アフィン空間 (V, V) は以下では V と略記されることが多い。

V, W をベクトル空間とし、$f : V \to W$ を線形写像とすると、(f, f) はアフィン空間 (V, V) から (W, W) へのアフィン写像である。このアフィン写像もやはり f と略記される。

■無限遠点の付加 K 上のアフィン空間 (X, U) に対し、次の性質をもつ K 上のベクトル空間 V とアフィン写像 $f : (X, U) \to V$ の組 (V, f) を構成することができる。

- K 上の任意のベクトル空間 W とアフィン写像 $g : (X, U) \to W$ の組 (W, g) に対し線形写像 $h : V \to W$ が唯一つ存在して $g = h \circ f$ を満たす。

上の性質を**普遍写像性質**という。このような組 (V, f) がかりに二つ以上の仕方で構成できたとしても、これらの間に自然な同型が存在することは、普遍写像性質からの帰結である。

(V, f) の普遍写像性質は次に述べる条件に等価である。

命題 3.1. $x_0 \in X$ とする。このとき任意の $\xi \in V$ に対して

$$\xi = tf(x_0) + f(a)$$

を満たす $t \in K$ と $a \in U$ の組 (t, a) が唯一つ存在する。

実際、命題 3.1 の条件を満たす (V, f) は普遍写像性質をもつ。逆は命題 3.1 の条件を満たす (V, f) を構成することができるので明かである。

後に見るように、V の次元は U の次元より一つだけ多く、射影空間 $M = [V]$ が定義できる。(X, U) から (V, f) を構成すること、あるいは (V, f) 自体をここでは**無限遠点の付加**と呼ぶ。

(V, f) の構成にはいろいろな仕方がある。

例 3.2. 集合

$$X \times (K \oplus U) = \{(x_0; t, a) \mid x_0 \in X, t \in K, a \in U\}$$

を考え、$b \in U$ に対し、$X \times (K \oplus U)$ の自分自身への写像 φ_b を次のように定義する。

$$\varphi_b(x_0; t, a) \stackrel{\text{def}}{=} (x_0 + b; t, a - tb)$$

容易に分かる通り、

$$\varphi_0(x_0; t, a) = (x_0; t, a)$$
$$\varphi_b \circ \varphi_c = \varphi_{b+c}$$

で $b \in U \mapsto \varphi_b$ は群 U の作用になっていることが分かる。この作用による点 $(x_0; t, a)$ の軌道を $[x_0; t, a]$ と書けば、定義から明らかに

$$\begin{aligned} &[x_0; t, a] = [x_0'; t', a'] \\ &\iff x_0' = x_0 + b, t' = t, a' = a - tb \\ &\quad \text{となる } b \in U \text{ が存在} \end{aligned}$$

V を軌道 $[x_0; t, a]$ ぜんぶの集合とする。$x_0 \in X$ とすると、任意の $\xi \in V$ に対して (t, a) の組が唯一つ存在して $\xi = [x_0; t, a]$ を満たす ((t, a) はアフィン空間の点 x_0 を原点としたときの ξ の座標のようなものだと思えばよい)。

任意の $\xi_i = [x_0; t_i, a_i]$ $(i = 1, 2)$、$\xi = [x_0; t, a]$、$s \in K$ に対して和 $\xi_1 + \xi_2 = [x_0; t_1 + t_2, a_1 + a_2]$、スカラー倍 $s\xi = [x_0; st, sa]$ は well-defined (x_0 の選び方に依らない) であり、V に K 上のベクトル空間の構造が入る。$f : (X, U) \to V$ を

$$f(x) = [x_0; 1, a] \quad (x = x_0 + a, x \in X)$$
$$f(a) = [x_0; 0, a] \quad (a \in U)$$

で定義すると、これらもまた well-defined である。そして

$$\begin{aligned} &[x_0; t, a] \\ &= t[x_0; 1, 0] + [x_0; 0, a] \\ &= tf(x_0) + f(a) \end{aligned}$$

だから (V, f) は補題の条件を満たす。すなわちアフィン空間 (X, U) に対する無限遠点の付加である。

例 3.3.

$$\tilde{V} = K^{\oplus X} \oplus U$$

とおく。ここで $K^{\oplus X}$ は集合 X を基として K 上自由に生成されるベクトル空間である。自然な単射により $x \in X$ に対応する自由ベクトル空間の元を (x) という記号で表すことにする。

$\tilde{f} = (\tilde{f}_1, \tilde{f}_2)$, $\tilde{f}_1 : X \to \tilde{V}$, $\tilde{f}_2 : U \to \tilde{V}$ を

$$\tilde{f}_1(x) = (x),$$
$$\tilde{f}_2(a) = a$$

で定義すると、$\tilde{f}_2$ は線形だが、$\tilde{f}$ はアフィン写像とはならない。そこで Y を

$$(x + a) - (x) - a \quad x \in X, a \in U$$

により生成される $\tilde{V}$ の部分空間とし、

$$V = \tilde{V}/Y,$$
$$\pi : \tilde{V} \to V \text{ 商写像}$$
$$f = (f_1, f_2), f_1 = \pi \circ \tilde{f}_1, f_2 = \pi \circ \tilde{f}_2$$

とすると、

$$\begin{aligned}
&f_1(x + a) - f_1(x) - f_2(a) \\
&= \pi((x + a)) - \pi((x)) - \pi(a) \\
&= \pi((x + a) - (x) - a) \\
&= 0, \\
&f_1(x + a) = f_1(x) + f_2(a)
\end{aligned}$$

となって f はアフィン写像になる。

さて任意のベクトル空間 W とアフィン写像 $g : (X, U) \to W$ の組 (W, g) に対し、$g = \tilde{h} \circ \tilde{f}$ を満たす線形写像 $\tilde{h} : \tilde{V} \to W$ が一意的に存在することは自由ベクトル空間の性質から容易に見ることができる。すると線形写像 $h : V \to W$ に対し、

$$g = h \circ f \Longleftrightarrow \tilde{h} = h \circ \pi$$

だから $g = h \circ f$ を満たす h の存在と一意性は $\tilde{h} = h \circ \pi$ を満たす h の存在と一意性とに同値である。ところが π が全射だから h の一意性は明らかである。そして h の存在を示すには Y 上で $\tilde{h} = 0$ を示せば十分である。じっさい、

$$\begin{aligned}
&\tilde{h}((x + a) - (x) - a) \\
&= \tilde{h} \circ \tilde{f}(x + a) - \tilde{h} \circ \tilde{f}(x) - \tilde{h} \circ \tilde{f}(a) \\
&= g(x + a) - g(x) - g(a) = 0
\end{aligned}$$

となって Y 上で $\tilde{h} = 0$ となる。

こうして (V, f) の普遍写像性質が証明された。

例 3.4. X が U のときは構成は簡単で、$V = K \oplus U$ とし、$f = (f_1, f_2)$, $f_1 : U \to V$, $f_2 : U \to V$ をそれぞれ

$$f_1(x_1 \dots x_n) = (1, x_1 \dots x_n)$$
$$f_2(x_1 \dots x_n) = (0, x_1 \dots x_n)$$

と定義すれば容易に分かる通り、(V, f) は無限遠点の付加である。

以下の命題は (V, f) の普遍写像性質またはそれと等価な命題 3.1、あるいは (V, f) の具体的な構成から容易に証明されることなので、証明を略す。

命題 3.2.

- $f = (f_1, f_2)$ とすると、$f_2 : U \to V$ は単射である。$f_1 : X \to V$ も単射である。
- $x \in X$ に対し $\alpha(f(x)) = 1$、$a \in U$ に対し $\alpha(f(a)) = 0$ を満たす V 上の一次形式 α が唯一つ存在する。
- $X' = \{\xi \in V \mid \alpha(\xi) = 1\}$, $U' = \{\xi \in V \mid \alpha(\xi) = 0\}$ とおくと、U' は V の部分空間で、実は $f_1 : X \to X'$ は双射、$f_2 : U \to U'$ は線形同型である。

■**アフィン構造**　K 上のベクトル空間 $V(\neq \{0\})$ に対して、V 上の零でない一次形式 α を V または V の定義する射影空間 $M = [V]$ の**アフィン構造**と呼ぶ。実際、

$$X' = \{\xi \in V \mid \alpha(\xi) = 1\}$$
$$U' = \{\xi \in V \mid \alpha(\xi) = 0\}$$

とおくと、X' は非空集合、U' は K 上のベクトル空間 (V の部分空間) で、U' の X' への作用を V における加法 $(x, a) \mapsto x + a$ で与えれば、(X', U') はアフィン空間になる。

M の部分集合 M_a, M_∞ を

$$M_a \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi = [x] \mid x \in X'\},$$
$$M_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \{\xi = [x] \mid x \in U', x \neq 0\}$$
$$= [U']$$

と定義すると M は M_a と M_∞ の直和に分解され、(M_a, U') は作用

$$[x] + a \stackrel{\text{def}}{=} [x + a] \quad (x \in X')$$

によりアフィン空間になる。もちろん (M_a, U') は (X', U') にアフィン同型。写像 $x \in X' \mapsto [x] \in M_a$, $a \in U' \mapsto a \in U'$ がそのアフィン同型を与える。

$(X', U') \cong (M_a, U')$ を **アフィン構造 α の定義するアフィン空間**と呼ぶ。特に (M_a, U') は M の α に関する**アフィン部分**とも呼ばれる。一方、$M_\infty = [U']$ は M の α に関する**無限遠部分**と呼ばれる。

命題 3.2 に現れる一次形式 α は V のアフィン構造である。そして同命題は f が (X, U) から α の定義するアフィン空間の上へのアフィン同型であることを主張している。

反対に、ベクトル空間 V と V 上のアフィン構造 α を勝手に与えたとき、(X', U') を α の定義するアフィン空間とし、f を X', U' から V のなかへの自明な単射とすると、(V, f) は (X', U') の無限遠点の付加になっていることは明らかである。

■まとめ　まとめると、任意のアフィン空間 (X, U) から無限遠点の付加と呼ばれる手続きにより、射影空間 $M = [V]$ と M 上のアフィン構造 α を構成することができ、(X, U) は M の α に関するアフィン部分と見なすことができる。

4　平面射影幾何学

■以下で使われる記号　以下では、簡単のため射影平面 $\pi, \pi', \ldots$ とそれらの部分空間 (すなわち点と直線) だけを考察の対象にする。π 上の点は $A, B, \ldots$ で π 上の直線は $l, m, n, \ldots$ で記される。

一方、双対平面 π^* 上の点は $A^*, B^*, \ldots$ で、直線は $l^*, m^*, \ldots$ で記すことにする。つまり右肩に $*$ が付いていれば、それは双対平面上の点や直線を表すというわけである (A^*, l^* と書いても、それは A, l の "双対点"、"双対直線" の意味でないことに注意)。

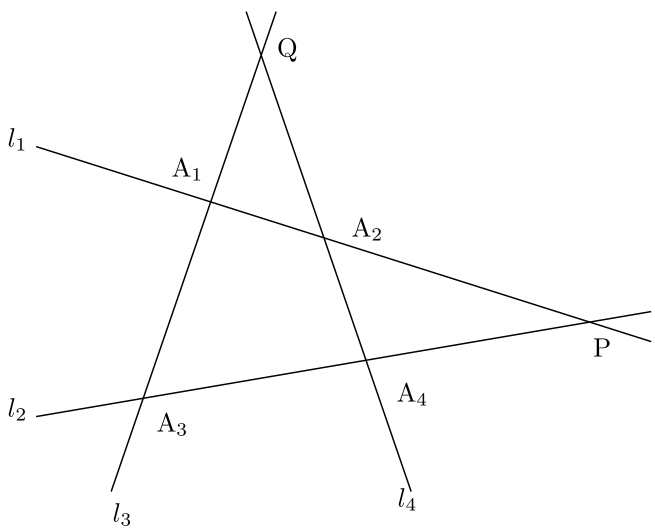
■射影平面の性質　射影平面では双対性により「点」は「直線」に、「直線」は「点」に写される (練習問題 2.3)。

定理 4.1. π 上の異なる二直線 l, m はかならず π 上の一点 P で交わる。

証明 これは既に証明した (定理 2.4)。 ∎

命題 4.2. 四点 A_1, A_2, A_3, A_4 が平面上で一般の位置にあると仮定すると、四直線 l_1, l_2, l_3, l_4 は平面上で一般の位置にある。ここで $l_1 = A_1 \vee A_2$, $l_2 = A_3 \vee A_4$, $l_3 = A_1 \vee A_3$, $l_4 = A_2 \vee A_4$.

$P = l_1 \wedge l_2$, $Q = l_3 \wedge l_4$ とおくと、A_1, A_4, P, Q も一般の位置にある (同様に A_2, A_3, P, Q は一般の位置にある)。



証明 l_1, l_2, l_3 が共点と仮定、P をその共点とすると、$P = l_1 \wedge l_3 = A_1$, $P = l_2 \wedge l_3 = A_3$, $A_1 = A_3$ となって矛盾。

後半は双対性により、l_1, l_2, l_3, l_4 が一般の位置にあれば、$P = l_1 \wedge l_2$, $Q = l_3 \wedge l_4$, $A_1 = l_1 \wedge l_3$, $A_4 = l_2 \wedge l_4$ は一般の位置にあるから明らか。 ∎

以下の補題と定理は一般論からの帰結であり、すでに証明されている。

補題 4.3. 射影直線 l 上に相異なる三点 A, B, C (l のなかで一般の位置にあるということ) が与えられたとき、

$$\theta([1,0]) = A, \theta([0,1]) = B, \theta([1,1]) = C,$$

を満たす枠 $\theta : P^1 \xrightarrow{\sim} l$ が一意に存在する。この枠 θ を $\theta = \Phi(A, B, C)$ と書く。

補題 4.4. 射影平面 π 上に一般の位置にある四点 A, B, C, D が与えられたとき、$\theta([1,0,0]) = A$, $\theta([0,1,0]) = B$, $\theta([0,0,1]) = C$, $\theta([1,1,1]) = D$ を満たす枠 $\theta : P^2 \xrightarrow{\sim} \pi$ が一意に存在する。この枠 θ を $\theta = \Phi(A, B, C, D)$ と書く。

定理 4.5 (射影幾何学の基本定理). l 上に相異なる三点 A, B, C をとり、l' 上にも相異なる三点 A', B', C' をとる。このとき、A, B, C をそれぞれ A', B', C' に写す l から l' への射影変換 φ が唯一つ存在する。

同様に、π 上にそのなかで一般の位置にある四点 A, B, C, D をとり、π' 上にもそのなかで一般の位置にある四点 A', B', C', D' をとる。このとき、A, B, C, D をそれぞれ A', B', C', D' に写す π から π' への射影変換 φ が唯一つ存在する。

■斉次座標による記法　π の枠 θ と双対枠 $\theta^\times$ が与えられたとき、任意の $(x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)$, $(y_0, y_1, y_2) \neq (0,0,0)$ に対して記号

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}_{x_0\ x_1\ x_2} &\stackrel{\text{def}}{=} \{\theta([x_0, x_1, x_2])\}, \\
l_{y_0\ y_1\ y_2} &\stackrel{\text{def}}{=} \{\theta([x_0, x_1, x_2]) \mid \sum_i x_i y_i = 0, (x_0, x_1, x_2) \neq (0,0,0)\}
\end{aligned}
$$

を定義する。$l_{y_0\ y_1\ y_2}$ は言い換えると

$$
\begin{aligned}
l_{y_0\ y_1\ y_2} &= \{\theta([x_0, x_1, x_2]) \mid \theta([x_0, x_1, x_2]) \perp \theta^\times([y_0, y_1, y_2])\} \\
&= \{\theta^\times([y_0, y_1, y_2])\}^\dagger.
\end{aligned} \tag{1}
$$

同様にして $\mathrm{P}^*_{x_0\ x_1\ x_2}$, $l^*_{y_0\ y_1\ y_2}$ も定義される。(1) から

$$
l_{y_0\ y_1\ y_2} = (\mathrm{P}^*_{y_0\ y_1\ y_2})^\dagger. \tag{2}
$$

対称性により

$$
l^*_{x_0\ x_1\ x_2} = (\mathrm{P}_{x_0\ x_1\ x_2})^\dagger \tag{3}
$$

も成立しよう。双対性を使えば、 (2)、 (3) から

$$
\begin{aligned}
(l_{y_0\ y_1\ y_2})^\dagger &= \mathrm{P}^*_{y_0\ y_1\ y_2}, \\
(l^*_{x_0\ x_1\ x_2})^\dagger &= \mathrm{P}_{x_0\ x_1\ x_2}.
\end{aligned}
$$

要するに、双対性により

- P は l に、l は P に変わる。
- $*$ は付いたり消えたりする。
- 斉次座標は変わらない。

さて定義より明らかに $\mathrm{P}_{x_0\ x_1\ x_2} \subset l_{a_0\ a_1\ a_2}$ の成り立つのは $\sum_i a_i x_i = 0$ の成り立つとき、かつそのときに限る。

数ベクトル $(a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2)$ は一次独立とすると、

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{a_0\ a_1\ a_2} \vee \mathrm{P}_{b_0\ b_1\ b_2} = l_{c_0\ c_1\ c_2} \\
&l_{a_0\ a_1\ a_2} \wedge l_{b_0\ b_1\ b_2} = \mathrm{P}_{c_0\ c_1\ c_2}
\end{aligned}
$$

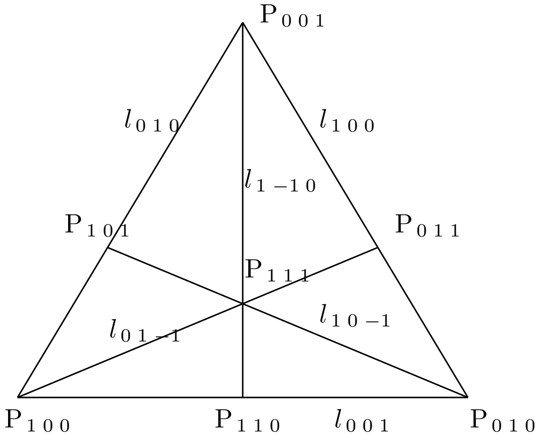
である。ここで (c_0, c_1, c_2) は $\sum_i a_i c_i = \sum_i b_i c_i = 0$ を満たす任意の 0 でない数ベクトルである。例えば行列式

$$\begin{vmatrix} x_0 & a_0 & b_0 \\ x_1 & a_1 & b_1 \\ x_2 & a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

における x_0, x_1, x_2 の余因子をそれぞれ c_0, c_1, c_2 とすれば、この条件を満たしている。

練習問題 4.1. 以下を確認せよ。

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}_{1\,0\,0} \vee \mathrm{P}_{0\,1\,0} = l_{0\,0\,1} \\ &\mathrm{P}_{1\,0\,0} \vee \mathrm{P}_{1\,1\,1} = l_{0\,1\,-1} \\ &\mathrm{P}_{0\,0\,1} \vee \mathrm{P}_{1\,1\,1} = l_{1\,-1\,0} \\ &l_{0\,0\,1} \wedge l_{1\,-1\,0} = \mathrm{P}_{1\,1\,0} \end{aligned}$$



5 複比

■複比の定義 直線 l 上の少なくとも三つは異なる四点 A, B, C, D に対し、これらの点の**複比**(記号で $(A, B; C, D)$ と書く) を一つの枠に関するそれぞれの座標 $[a](= [a_0, a_1])$, $[b]$, $[c]$, $[d]$ を用いて

$$(A, B; C, D) \overset{\text{def}}{=} \frac{|\ a,\ c\ |}{|\ a,\ d\ |} \cdot \frac{|\ b,\ d\ |}{|\ b,\ c\ |}$$

と定義する。ここで

$$|\ a,\ c\ | = \begin{vmatrix} a_0 & c_0 \\ a_1 & c_1 \end{vmatrix}, \dots$$

A, B, C, D の複比は明らかに座標の代表 a, b, c, d の選び方によらず、また座標枠の選び方にもよらない (well-defined)。$A = D$ または $B = C$ のときは、分母は 0 になるが、このときは仮定から、$A \neq C, B \neq D$ だから、$|\ a,\ c\ |, |\ b,\ d\ | \neq 0$ である。そこで $A = D$ または $B = C$ のときは複比を ∞ と定義する。$A \neq D, B \neq C$ ならば複比は体 K の元である。

A, B, C を相異なる三点とすると、枠 $\theta = \Phi(B, A, C)$ が定義される。定義により、$\theta([1, 0]) = B$, $\theta([0, 1]) = A$, $\theta([1, 1]) = C$ である。$D \neq A$ とすると、$\lambda \in K$ が一意に決まって、$\theta([1, \lambda]) = D$ となる。このとき、

$$(A, B; C, D) = \lambda$$

が成り立つ (確認せよ)。そこで λ を点 A, B, C に対する D の複比ということがある。

練習問題 5.1. 以下を証明せよ。

$$(C, D; A, B) = (A, B; C, D),$$
$$(B, A; C, D) = (A, B; C, D)^{-1},$$
$$(A, B; D, C) = (A, B; C, D)^{-1}.$$

■複比と射影変換

定理 5.1. $\varphi : l \longrightarrow l'$ を双射とする。

φ が射影変換ならば、l 上の相異なる任意の四点 A, B, C, D の複比を不変にする。すなわち、$A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $\cdots$ とおくとき $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ が成り立つ。

逆に、A, B, C を l 上の相異なる三点とし、任意の他の点 D に対して、φ が複比 $(A, B; C, D)$ を不変にするならば φ は射影変換である。

証明 定理の前半は明らかなので、後半を証明する。$\theta = \Phi(B, A, C)$, $\theta' = \Phi(B', A', C')$ とし、$\psi = \theta' \circ \theta^{-1}$ とおく。$\psi : l \xrightarrow{\sim} l'$ は $\psi(A) = A'$, $\psi(B) = B'$, $\psi(C) = C'$ を満たす射影変換である。さて、$D(\neq A, B, C)$ をとり、$\lambda = (A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$ とおく。すなわち $D = \theta([1, \lambda])$, $D' = \theta'([1, \lambda])$ 。すると明らかに $\psi(D) = D'$ である。以上から、$\varphi = \psi$ が分かり、φ が射影変換であることが分かる。 ∎

6　幾何的射影変換

■幾何的射影変換の定義　φ が π から π' への双射で、

- 直線を直線に写す。すなわち π 上の任意の直線 l に対して、$\varphi(l)$ はまた π' の直線である。

という条件を満たすとき、φ を π から π' への**幾何的射影変換**という。

明らかに射影変換は幾何的射影変換である。後に、実射影平面ではそれの逆が成り立つことを示す。すなわち、実射影平面では幾何的射影変換は (線形同型から定義される) 射影変換であることを示す。

上と同値な定義として以下に述べるような定義もある。まず π 上の点のあつまりを $\mathcal{L}^0(\pi)$ と記し、π 上の直線のあつまりを $\mathcal{L}^1(\pi)$ と記す。$\mathcal{L}^0(\pi'), \mathcal{L}^1(\pi')$ の意味も同様である。φ を π から π' への幾何的射影変換とすると、φ は $\varphi^0(P) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(P)$, $\varphi^1(l) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \varphi(l)$ で定義される写像 $\varphi^0 : \mathcal{L}^0(\pi) \longrightarrow \mathcal{L}^0(\pi')$, $\varphi^1 : \mathcal{L}^1(\pi) \longrightarrow \mathcal{L}^1(\pi')$ を誘導する。このとき、

- φ^0 は $\mathcal{L}^0(\pi)$ から $\mathcal{L}^0(\pi')$ への双射で、
- 任意の $P \in \mathcal{L}^0(\pi), l \in \mathcal{L}^1(\pi)$ に対して、$P \subset l \Longrightarrow \varphi^0(P) \subset \varphi^1(l)$ が成り立つ。

ところが逆に

定理 6.1. 上記の条件を満たす φ^0, φ^1 が与えられたとき、φ^0, φ^1 を誘導する幾何的射影変換 $\varphi : \pi \longrightarrow \pi'$ が唯一つ存在する。よって、この条件を満たす φ^0, φ^1 の組をもって幾何的射影変換と定義してもよい。

証明は簡単であるので、読者に委ねる (ヒント：上の第二の条件の逆：$P \not\subset l \Longrightarrow \varphi^0(P) \not\subset \varphi^1(l)$ を示せ)。

命題 6.2. φ が π から π' への幾何的射影変換ならば、π 上の任意の二点 A, B に対して、

$$\varphi(A \vee B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$$

が成り立つ。また π 上の任意の二直線 l, m に対して、

$$\varphi(l \wedge m) = \varphi(l) \wedge \varphi(m)$$

が成り立つ。

証明 $A \neq B$ と仮定していい。$A \vee B$ は $A, B \subset A \vee B$ なる直線だから、$\varphi(A \vee B)$ は $\varphi(A), \varphi(B) \subset \varphi(A \vee B)$ なる直線である。よって二点を通る直線の一意性から $\varphi(A \vee B) = \varphi(A) \vee \varphi(B)$ でなければならない。
後半も $l \neq m$ と仮定していい。$l \wedge m$ は $l \wedge m \subset l, m$ なる点であるから、$\varphi(l \wedge m) \subset \varphi(l), \varphi(m)$ である。$\varphi(l) \neq \varphi(m)$ だから、二直線 $\varphi(l), \varphi(m)$ は一点で交わる。ゆえに $\varphi(l \wedge m) = \varphi(l) \wedge \varphi(m)$ ∎

補題 6.3. φ を π から π' への幾何的射影変換とする。π 上の四点 A_1, A_2, A_3, A_4 が π のなかで一般の位置にあるならば、A'_1, A'_2, A'_3, A'_4 もまた π' のなかで一般の位置にある。ここで $A'_i = \varphi(A_i)$。

証明 三点 A'_1, A'_2, A'_3 が共線でないことを示せば十分である。まず $A_1 = (A_1 \vee A_2) \wedge (A_3 \vee A_1)$ だから $A'_1 = (A'_1 \vee A'_2) \wedge (A'_3 \vee A'_1)$ である。ここで $A'_3 \subset A'_1 \vee A'_2$ であると仮定してみよう。このとき、$A'_3 \subset (A'_1 \vee A'_2) \wedge (A'_3 \vee A'_1)$ となって、二直線は一点で交わるから、$A'_3 = A'_1$ すなわち $A_3 = A_1$ でなければならない。これは矛盾である。よって $A'_3 \not\subset A'_1 \vee A'_2$。 ∎

■幾何的射影変換が射影変換であるための条件

補題 6.4. φ を π 上の幾何的射影変換とする。φ はさらに

- φ がすべての直線上で射影変換になっている。すなわち、φ の任意の直線 l への制限 $\varphi_l : l \longrightarrow \varphi(l)$ は l から $\varphi(l)$ への射影変換である

という条件を満たすものとする。このとき π 上のある枠に関して、四点 $\mathrm{P}_{1\,0\,0}, \mathrm{P}_{0\,1\,0}, \mathrm{P}_{0\,0\,1}, \mathrm{P}_{1\,1\,1}$ が φ で不変ならば、じつは $\varphi = \mathrm{id}_\pi$ である。

証明 φ が四点 $\mathrm{P}_{1\,0\,0}, \mathrm{P}_{0\,1\,0}, \mathrm{P}_{0\,0\,1}, \mathrm{P}_{1\,1\,1}$ をそれぞれ不変に保つということは、φ は直線 $l_{1\,0\,0}, l_{0\,1\,0}, l_{0\,0\,1}$ をそれぞれ (全体として) 不変に保つことであり、それは点 $\mathrm{P}_{1\,1\,0}, \mathrm{P}_{0\,1\,1}, \mathrm{P}_{1\,0\,1}$ をそれぞれ不変に保つことも意味する (練習問題 4.1)。よって射影幾何学の基本定理によりここから φ が $l_{1\,0\,0}, l_{0\,1\,0}, l_{0\,0\,1}$ 上で恒等写像であることが導かれる。

$l_{1\,0\,0},\ l_{0\,1\,0},\ l_{0\,0\,1}$ 上にない点 A に関しては、$m = A \vee \mathrm{P}_{0\,1\,0}$, $n = A \vee \mathrm{P}_{0\,0\,1}$, $B = m \wedge \mathrm{P}_{0\,1\,0}$, $C = n \wedge l_{0\,0\,1}$ とおくと、$m = B \vee \mathrm{P}_{0\,1\,0}$, $n = C \vee \mathrm{P}_{0\,0\,1}$ で、φ は m, n を不変に保つから、φ は $A = m \wedge n$ も不変に保つことが分かる。したがって、φ は恒等変換である。 ▮

定理 6.5. φ は π から π' への幾何的射影変換とする。φ はさらに

- π 上の任意の直線 l に対して、φ の l への制限 $\varphi_l : l \longrightarrow \varphi(l)$ は射影変換である

という条件を満たすものとする。このとき φ は π から π' への射影変換である。

証明 π, π' の枠を $\varphi(\mathrm{P}_{1\,0\,0}) = \mathrm{P}'_{1\,0\,0}, \varphi(\mathrm{P}_{0\,1\,0}) = \mathrm{P}'_{0\,1\,0}, \varphi(\mathrm{P}_{0\,0\,1}) = \mathrm{P}'_{0\,0\,1}, \varphi(\mathrm{P}_{1\,1\,1}) = \mathrm{P}'_{1\,1\,1}$, が成り立つように選んでおく。射影幾何学の基本定理により、φ と同じ様に、$\psi(\mathrm{P}_{1\,0\,0}) = \mathrm{P}'_{1\,0\,0}, \ldots$ を満たす射影変換 ψ が (唯一つ) 存在している。$\theta = \psi^{-1} \circ \varphi$ とおくと、θ は仮定から任意の直線上で射影変換となっており、かつ $\mathrm{P}_{1\,0\,0}, \ldots$ を不変に保つから、補題 6.4 により $\theta = \mathrm{id}_\pi$ である。すなわち、$\varphi = \psi$ で、したがってとくに φ は射影変換である。 ▮

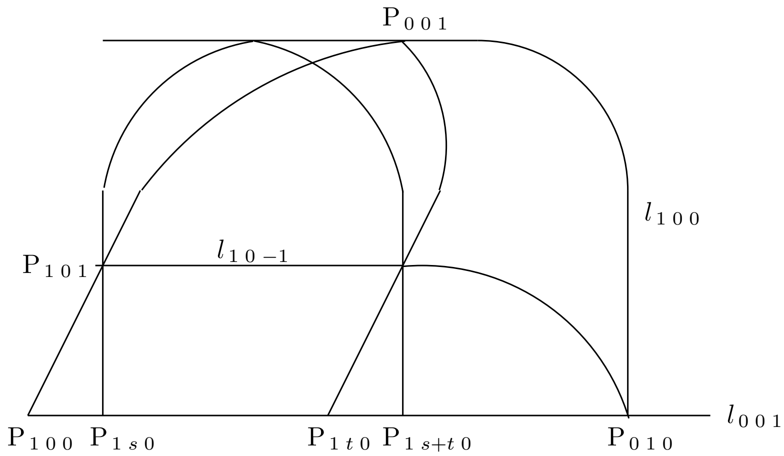
■作図による加法と乗法

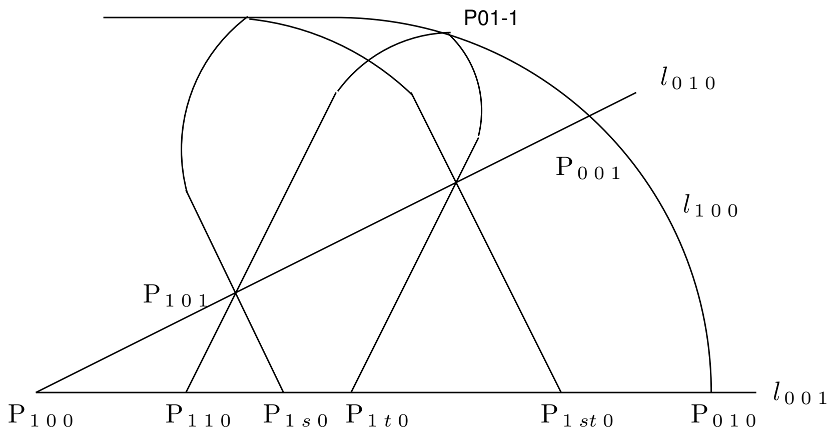
練習問題 6.1. 射影平面 π 上に枠を定めて、点 $\mathrm{P}_{x_0\,x_1\,x_2}$ と直線 $l_{\xi_0\,\xi_1\,\xi_2}$ を定義する。このとき任意の数 $s, t \in K$ に対して

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{1\,s+t\,0} = \\
&\Big[\big\{(\mathrm{P}_{1\,s\,0} \vee \mathrm{P}_{1\,0\,1}) \wedge l_{1\,0\,0}\big\} \vee \big\{(\mathrm{P}_{1\,t\,0} \vee \mathrm{P}_{0\,0\,1}) \wedge l_{1\,0\,-1}\big\}\Big] \\
&\wedge l_{0\,0\,1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{P}_{1\,st\,0} = \\
&\Big[\big\{(\mathrm{P}_{1\,s\,0} \vee \mathrm{P}_{1\,0\,1}) \wedge l_{1\,0\,0}\big\} \vee \big\{(\mathrm{P}_{1\,t\,0} \vee \mathrm{P}_{0\,1\,-1}) \wedge l_{0\,1\,0}\big\}\Big] \\
&\wedge l_{0\,0\,1}.
\end{aligned}$$

が成り立つ。このことを確認せよ。





すなわち、$l_{0\,0\,1}$ 上の点 $\mathrm{P}_{0\,1\,0}, \mathrm{P}_{1\,0\,0}, \mathrm{P}_{1\,1\,0}$ に関して、複比 $s+t$, st をもつ点は、複比 s, t をもつ点から π 上の作図を使って構成することができる。

この事実は後に利用される。

7　射影と背景写像

■射影　以下しばらく、点 $A \subset \pi$ に対し、双対性により対応する双対平面上の直線 $A^\dagger$ を a^* で表すことにする。同様に、直線 $u \subset \pi$ に対し、対応する双対平面上の点 $u^\dagger$ を U^* で表すことにする。

点 $A \subset \pi$ に対し、π 上の直線で、A を通るもの全ての集合を記号 (A) で表そう。直線 $u \subset \pi$ に対し、u の上にあるすべての点の集合を記号 (u) で表そう (u と (u) は文脈に応じて同一視することもあれば、区別することもある)。

双対性 $\dagger$ は (A) を (a^*) の上に一対一に写し、(a) を (A^*) の上に一対一に写す。

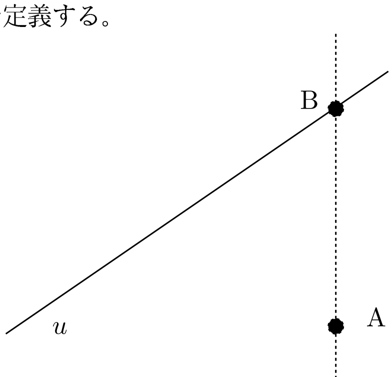
さて双射 $\varphi_1 : (u) \longrightarrow (u')$, $\varphi_2 : (u) \longrightarrow (A)$, $\varphi_3 : (A) \longrightarrow (u)$, $\varphi_4 : (A) \longrightarrow (A')$ はそれぞれ以下の条件を満たすとき π 上の**射影**と呼ばれる。

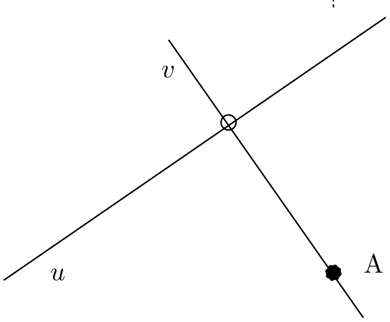
- $\varphi_1 : u \longrightarrow u'$ が射影変換である。
- $\dagger \circ \varphi_2 : u \longrightarrow a^*$ が射影変換である。
- $\varphi_3 \circ \dagger : a^* \longrightarrow u$ が射影変換である。
- $\dagger \circ \varphi_4 \circ \dagger : a^* \longrightarrow a'^*$ が射影変換である。

■基本射影　$A, u \subset \pi$ ($A \not\subset u$) に対し、写像 $\overline{\wedge}_{A,u} : (u) \to (A)$, $\overline{\wedge}_{u,A} : (A) \to (u)$ をそれぞれ、

$$\overline{\wedge}_{A,u} : B \mapsto A \vee B$$
$$\overline{\wedge}_{u,A} : v \mapsto u \wedge v$$

で定義する。





$\overline{\wedge}_{A,u}, \overline{\wedge}_{u,A}$ は明らかに互いに逆写像の関係にあり、したがって、とくに各々は双射である。

定理 7.1. $\overline{\wedge}_{A,u}, \overline{\wedge}_{u,A}$ は射影である。

証明 $\psi = \dagger \circ \barwedge_{A,u} : (u) \to (a^*)$ とおく。$A = \mathrm{P}_{0\,0\,1}$, $u = l_{0\,0\,1}$ となるような枠を π に設け、これに双対な枠を π^* に設けると、$a^* = l^*_{0\,0\,1}$, $U^* = \mathrm{P}^*_{0\,0\,1}$ である。u 上の点は、$\mathrm{P}_{0\,1\,0}$ か $\mathrm{P}_{1\,t\,0}$ のいずれかで、

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{P}_{0\,1\,0}) &= (\mathrm{P}_{0\,0\,1} \vee \mathrm{P}_{0\,1\,0})^\dagger \\ &= l^\dagger_{0\,0\,1} \wedge l^\dagger_{0\,1\,0} = \mathrm{P}^*_{1\,0\,0},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi(\mathrm{P}_{1\,t\,0}) &= (\mathrm{P}_{0\,0\,1} \vee \mathrm{P}_{1\,t\,0})^\dagger \\ &= l^\dagger_{0\,0\,1} \wedge l^\dagger_{1\,t\,0} = \mathrm{P}^*_{t\,-1\,0}.\end{aligned}$$

が成り立つ。すなわち

$$\varphi : \pi \to \pi^*, \mathrm{P}_{x_0\,x_1\,x_2} \mapsto \mathrm{P}^*_{y_0\,y_1\,y_2}$$

をマトリクス

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

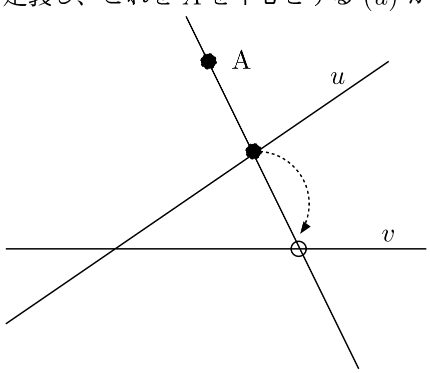
で定義すると、φ の u への制限は ψ に等しくなっている。ゆえに ψ は $u \to a$ の射影変換で、定義により、$\barwedge_{A,u}$ は射影である。$\barwedge_{u,A}$ は逆写像だから、これも射影である。 ▮

$\barwedge_{A,u}, \barwedge_{u,A}$ を π 上の**基本射影**と呼ぶ。

■**背景写像**　$A, u, v \subset \pi$ $(A \not\subset u, v)$ に対し、写像 $\overset{A}{\doublebarwedge}_{v,u} : (u) \to (v)$ を

$$\overset{A}{\doublebarwedge}_{v,u} \overset{\mathrm{def}}{=} \barwedge_{v,A} \circ \barwedge_{A,u}$$

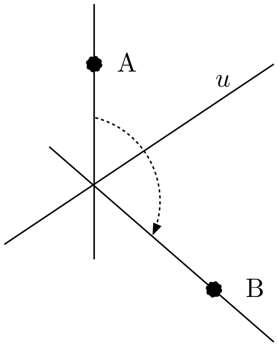
で定義し、これを A を中心とする (u) から (v) への**背景写像**と呼ぶ。



また $A, B, u \subset \pi$ $(A, B \not\subset u)$ に対し、写像 $\overset{u}{\doublebarwedge}_{B,A}$ を

$$\overset{u}{\doublebarwedge}_{B,A} \overset{\mathrm{def}}{=} \barwedge_{B,u} \circ \barwedge_{u,A}$$

で定義し、これを u を軸とする (A) から (B) への**背景写像**と呼ぶ。



背景写像は射影である。

定理 7.2. 直線から直線への射影 $\varphi : u \to u'$ は $u \neq u'$ のとき、二つの背景写像 φ_1, φ_2 を用いて、$\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ のかたちに表すことができる。

証明 異なる三点 $A, B, C \subset u$ をとり、$A' = \varphi(A)$, $B' = \varphi(B)$, $C' = \varphi(C)$ とおく。このとき、$A, A' \neq O(= u \wedge u')$ と仮定しても一般性を失わない。直線 $A \vee A'$ 上に第三の点 P をとり、また A' を通る第三の直線 u'' をとる。P は u, u'' の外にあるから、背景写像

$$\varphi_2 = \overset{P}{\overline{\overline{\wedge}}}_{u'',u} : u \to u''$$

が定義される。明らかに $A' = \varphi_2(A)$ が成り立つ。
$B'' = \varphi_2(B)$, $C'' = \varphi_2(C)$ とおくと、B', B'', C', C'' は一般の位置にあるから、直線 $B' \vee B''$ と $C' \vee C''$ は u', u'' 外の点 Q で交わる。よってまた背景写像

$$\varphi_1 = \overset{Q}{\overline{\overline{\wedge}}}_{u',u''} : u'' \to u'$$

が定義され、$\varphi_1(A') = A'$, $\varphi_1(B'') = B'$, $\varphi_1(C'') = C'$ を満たす。射影 $\varphi_1 \circ \varphi_2 : u \to u'$ を考えると、これは φ と同じく、A, B, C をそれぞれ A', B', C' に写し、したがって射影幾何の基本定理により $\varphi = \varphi_1 \circ \varphi_2$ が成り立つ。 ∎

練習問題 7.1. すべての射影は基本射影の積である。

■デザルグの定理　背景写像を使って証明される定理のひとつにデザルグの定理がある。これは二つの三角形 $\triangle A_1A_2A_3$, $\triangle B_1B_2B_3$ の対応する頂点を結んだ直線 A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 が一点で交わるならば、対応する辺の交わる点 $a_1 \wedge b_1$, $a_2 \wedge b_2$, $a_3 \wedge b_3$ が一直線上にあることを主張する定理であるが、その証明に背景写像を使いたいと思う。

そのためにいくつかの用語を準備しておこう。

独立な三点 (非共線な三点) A_1, A_2, A_3 から成る順序集合を**三点系**と呼び、これを $A = (A_1, A_2, A_3)$ と書くことにする。三角形の頂点に順序をつけたものを三点系というわけである。

A_i を三点系 A の**頂点**といい、直線 $a_i \overset{\text{def}}{=} A_j \vee A_k$ (ここで i, j, k は巡回順。以下同様) を三点系の**辺**と呼ぶ。

練習問題 7.2. 定義により、三点系 A の三つの頂点は独立だが、三つの辺も独立 (非共点) である。そして $A_i = a_j \wedge a_k$ が成り立つ。

二つの三点系 (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3) があるとき、A_i と B_i は**対応する**頂点であるという。また a_i と b_i は対応する辺であるという。

二つの三点系 $A = (A_1, A_2, A_3)$, $B = (B_1, B_2, B_3)$ は、任意の二組の対応する頂点が一般の位置にあるとき、すなわち、任意の i, j $(i < j)$ に対して四点 A_i, B_i, A_j, B_j が一般の位置にあるときに**一般の位置**にあるということにする。

命題 7.3. 三点系 A, B が一般の位置にあるならば、任意の $i < j$ について四直線 a_i, b_i, a_j, b_j は一般の位置にある (どの三つをとっても非共点)。

証明 背理法を使おう。たとえば a_1, a_2, b_1, b_2 が一般の位置にないと仮定する。とくに a_1, a_2, b_1 が共点とすると、その交点は A_3 である。すると $A_3, B_2, B_3 \subset b_1$ となって矛盾。 ▮

三点系 A と B が一般の位置にあるとき、各 i に対して、直線 $l_i = A_i \vee B_i$ と点 $Q_i = a_i \wedge b_i$ が定義される。

定理 7.4 (デザルグの定理). 三点系 $A = (A_1, A_2, A_3)$ と $B = (B_1, B_2, B_3)$ は一般の位置にあると仮定する。l_i, Q_i ($i = 1, 2, 3$) を前のように定義する。このとき、l_1, l_2, l_3 が共点 (一点で交わる) ならば、Q_1, Q_2, Q_3 は共線である (一直線上にある)。

逆も成り立つ。

証明 P を l_1, l_2, l_3 の共点とする。
$Q_i \not\subset l_j, l_k$ なので、各 $i = 1, 2, 3$ に対して背景写像

$$\varphi_i = \overset{Q_i}{\overline{\overline{\wedge}}}_{l_k, l_j} \colon l_j \to l_k$$

が定義されるが、この背景写像に関して、明らかに

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 : A_2 \to A_3, B_2 \to B_3, P \to P \\
&\varphi_2 : A_3 \to A_1, B_3 \to B_1, P \to P \\
&\varphi_3 : A_1 \to A_2, B_1 \to B_2, P \to P
\end{aligned}$$

が成り立っている。すなわち、$\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1$ とおくと、φ は直線 l_2 の自身への射影写像で、三点 A_2, B_2, P が固定点になる。ここから射影幾何の基本定理によって $\varphi = \mathrm{id}_{l_2}$ が導かれる。
Q_1, Q_2, Q_3 が共線なことを示そう。二つの場合に分けて考える。一つはすべての i, j $(i < j)$ に対して、$P \subset Q_i \vee Q_j$ となる場合である (そのような場合は存在する)。この場合は、$P \neq Q_1, Q_2, Q_3$ だから明らかに $Q_3 \subset Q_1 \vee Q_2$ が成り立って、Q_i は共線である。
あと一つは少なくとも一対の i, j ($i < j$) に対して $P \not\subset Q_i \vee Q_j$ となる場合である。この場合は、$P \not\subset Q_1 \vee Q_2$ と仮定しても一般性を失わない。
$C_i = (Q_1 \vee Q_2) \wedge l_i$ $(i = 1, 2, 3)$ とおくと、

$$\varphi_1(C_2) = (C_2 \vee Q_1) \wedge l_3 = (Q_1 \vee Q_2) \wedge l_3 = C_3,$$

$$\varphi_2(C_3) = (C_3 \vee Q_2) \wedge l_1 = (Q_1 \vee Q_2) \wedge l_1 = C_1.$$

ゆえに

$$C_2 = \varphi(C_2) = \varphi_3(C_1) = (C_1 \vee Q_3) \wedge l_2$$

となる。

ところが今の場合、$C_1 \neq C_2$ が成り立っている。何故なら、$P \not\subset Q_1 \vee Q_2$ だから、$P \neq C_i$ $(i = 1, 2, 3)$。ゆえに $l_i = C_i \vee P$ $(i = 1, 2, 3)$ で、もし $C_1 = C_2$ ならば $l_1 = l_2$ となって矛盾する。

よって

$$Q_3 \subset C_1 \vee C_2 = Q_1 \vee Q_2$$

となって、Q_1, Q_2, Q_3 は共線である。

定理の逆は双対性による。三つの直線 a_1, a_2, a_3 は独立 (非共点)。同様に b_1, b_2, b_3 は独立で、任意の i, j $(i < j)$ について、a_i, b_i, a_j, b_j は π のなかで一般の位置にある (どの三直線も非共点) から、双対性により $A^* = (A_1^*, A_2^*, A_3^*)$, $B^* = (B_1^*, B_2^*, B_3^*)$ は三点系で、これらは π^* のなかで一般の位置にある。また $l_i = A_i \vee B_i$, $Q_i = a_i \wedge b_i$ だから、やはり双対性により $L_i^* = a_i^* \wedge b_i^*$, $q_i^* = A_i^* \vee B_i^*$ $(i = 1, 2, 3)$ である。さて、仮定から Q_1, Q_2, Q_3 が共線ということは、q_1^*, q_2^*, q_3^* が共点ということである。デザルグの定理により、L_1^*, L_2^*, L_3^* は共線で、したがって、l_1, l_2, l_3 は共点である。 ▮

■パップスの定理　以下に述べるパップスの定理も背景写像を使って証明できる。

定理 7.5 (パップスの定理). a, b を異なる二直線とし、P を交点とする。A_1, A_2, A_3 を a 上の相異なる三点、B_1, B_2, B_3 を b 上の相異なる三点とし、これらは P とは異なると仮定する。

各 $i = 1, 2, 3$ に対し $l_i = A_j \vee B_k$, $m_i = A_k \vee B_j$ (ここで i, j, k は巡回順。以下同様), $C_i = l_i \wedge m_i$ とおくと、$C_1, C_2, C_3 (\neq)$ で C_1, C_2, C_3 は共線である。c をその共線とすると、$c \neq a, b$ である。

証明 $Q = l_2 \wedge l_3$, $R = m_1 \wedge m_2$ とおく。背景写像

$$\varphi_1 = \overset{B_1}{\overline{\overline{\wedge}}}_{a, l_3} \colon l_3 \to a$$
$$\varphi_2 = \overset{B_3}{\overline{\overline{\wedge}}}_{m_1, a} \colon a \to m_1$$
$$\varphi_3 = \overset{C_2}{\overline{\overline{\wedge}}}_{l_3, m_1} \colon m_1 \to l_3$$

を定義すると容易に分かるように、

$$\varphi_1 : A_1 \to A_1, Q \to A_3, B_2 \to P\ (, C_3 \to A_2),$$
$$\varphi_2 : A_1 \to R, A_3 \to A_3, P \to B_2\ (, A_2 \to C_1),$$
$$\varphi_3 : R \to A_1, A_3 \to Q, B_2 \to B_2\ (, C_1 \to (C_1 \vee C_2) \wedge l_3)$$

が成り立っている。

$\varphi = \varphi_3 \circ \varphi_2 \circ \varphi_1 : l_3 \to l_3$ とおくと、φ は l_3 から l_3 への射影で、A_1, B_2, Q (これらは相異なる) を固定しているから、基本定理により $\varphi = \mathrm{id}$ でなければならない。

ゆえに $C_3 = \varphi(C_3) = (C_1 \vee C_2) \wedge l_3$ で、C_1, C_2, C_3 は共線である。(ここで $C_i \neq C_j$ を確認せよ) c をその共線とすると、$C_1 \not\subset a, b$ だから、$c \neq a, b$ である。 ▮

■実射影平面の性質　今までは一般の体 K 上の射影平面で成立する議論だったが、K が実数体の場合には特に、以下に述べるような興味深い定理が成り立つ。すなわち、射影写像が幾何的射影写像であることは一般に成り立つが、それの逆が実射影平面において成立するのである。正確に述べると、

定理 7.6. π, π' を実射影平面とすると、幾何的射影写像 $\varphi : \pi \to \pi'$ はじつは射影写像である。

証明 π, π' 上の枠を $\varphi(\mathrm{P}_{\,1\,0\,0}) = \mathrm{P}'_{\,1\,0\,0}$, $\varphi(\mathrm{P}_{\,0\,1\,0}) = \mathrm{P}'_{\,0\,1\,0}$, $\varphi(\mathrm{P}_{\,0\,0\,1}) = \mathrm{P}'_{\,0\,0\,1}$, $\varphi(\mathrm{P}_{\,1\,1\,1}) = \mathrm{P}'_{\,1\,1\,1}$ を満たすように選んでおく。$l = l_{\,0\,0\,1}$, $l' = l'_{\,0\,0\,1}$ とおくと、φ' が l を l' の上に写すことは明らかである。φ_l を φ の l への制限としよう。
各数 $t \in K$ に対し、数 $\alpha(t) \in K$ を

$$\varphi(\mathrm{P}_{\,1\,t\,0}) = \mathrm{P}'_{\,1\,\alpha(t)\,0}$$

で定義する。写像 $\alpha : t \mapsto \alpha(t)$ は明らかに K の K 自身への双射である。
練習問題 6.1 から分かるように

$$\varphi(\mathrm{P}_{\,1\,s+t\,0}) = \mathrm{P}'_{\,1\,\alpha(s+t)\,0} = \mathrm{P}'_{\,1\,\alpha(s)+\alpha(t)\,0},$$
$$\varphi(\mathrm{P}_{\,1\,st\,0}) = \mathrm{P}'_{\,1\,\alpha(st)\,0} = \mathrm{P}'_{\,1\,\alpha(s)\alpha(t)\,0}.$$

が成り立つ。すなわち $\alpha(s+t) = \alpha(s) + \alpha(t)$, $\alpha(st) = \alpha(s)\alpha(t)$ が成り立って、α は K の自己同型であることが分かる。
ところが $K = \mathbb{R}$ の場合には、よく知られているように、自己同型は恒等写像である。ゆえに、すべての t に対して

$$\varphi(\mathrm{P}_{\,1\,t\,0}) = \mathrm{P}'_{\,1\,t\,0}$$

が成り立っていることになる。
これは φ_l が固定された三点 $\mathrm{P}_{\,0\,1\,0}, \mathrm{P}_{\,1\,0\,0}, \mathrm{P}_{\,1\,1\,0}$ に対する他の任意の点 $\mathrm{P}_{\,1\,t\,0}$ の複比 t を変えないことを意味し、定理 5.1 により $\varphi_l : l \to l'$ は射影写像である。
したがって、定理 6.5 により φ は射影写像である。 ∎

参考文献

[1] 郡 敏昭 「射影平面の幾何学」遊星社 発行
[2] 河田敬義 「アフィン幾何・射影幾何」(岩波講座 基礎数学 線型代数 v) 岩波書店
[3] 弥永昌吉・平野鉄太郎「射影幾何学」朝倉書店