測度とルベーグ積分の基礎 — 積分変数の変換 —

木原浩貴
URL: http://h1965kihara.web.fc2.com/mp/index.html

2013 年 1 月 21 日

■用語について

矩形集合 (rectanglular set)　$[a_1,\, b_1) \times \cdots \times [a_n,\, b_n)$ のかたちの $\mathbb{R}^n$ の部分集合を矩形集合、あるいは略して矩形と呼ぶ。ここで $a_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ は実数。$[a,\, b) = \left\{\, t \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leqslant t < b \,\right\}$。なお、上で $[a,\, b)$ を $[a,\, b]$ にかえたものは閉矩形 (closed rectangular set)、$(a,\, b)$ にかえたものは開矩形 (open rectangular set) という。

立方体 (cubic set)　上の矩形で $b_1 - a_1 = \cdots = b_n - a_n = 2r$ のとき、矩形はとくに n-次元立方体と呼ばれる。略してたんに立方体ともいう。$(x_1, \cdots, x_n)$ $(x_i = \frac{b_i - a_i}{2})$ をその**中心**、r をその**半径**と呼ぶ。

基本集合 (elementary set)　$A_1 \cup \cdots \cup A_k$ (A_i は矩形、$k \geqslant 1$) のかたちの $\mathbb{R}^n$ の部分集合である。

ノルム (norm)　$x = (x^i) \in \mathbb{R}^n$ にたいし x のノルム (norm) を $\|\, x \,\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left| x^i \right|$ により定義する。一次変換 $L : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ の作用素ノルム (operator norm) とは $\|\, L \,\| = \sup_{x \neq 0} \|\, Lx \,\| / \|\, x \,\|$ により定義されるノルムである。$\mathbb{R}^n$ の標準基底 $e_1, \cdots, e_n$ にたいし、$L(e_j) = \sum_{i=1}^n L^i_j e_i$ $(j = 1, \cdots, p)$ とおくと、$\|\, L \,\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \sum_{j=1}^p \left| L^i_j \right|$ がなりたつ。

■$\mathbb{R}^n$ の開集合の上で定義された可測関数　ここでは $\mathbb{R}^n$ 全体ではなく、$\mathbb{R}^n$ の開集合 U において定義された可測関数の積分を論ずる。

目標は、次のよく知られた公式の証明を与えることである。

$$\int_U f\, d\mu = \int_V (f \circ \varphi) \left| \det D\varphi \right|\, d\mu. \tag{1}$$

これは**積分変数の変換**の式と呼ばれる。ここで U, V は $\mathbb{R}^n$ の開集合、f は U において定義された (ルベーグ) 可積分関数、$\varphi : V \to U$ は C^1 級同型写像である。$D\varphi$ は φ の微分で、$D\varphi : x \in V \mapsto (D\varphi)_x \in M(n, \mathbb{R})$。$M(n, \mathbb{R})$ は n 次正方行列 ($\mathbb{R}^n$ 上の一次変換) の全体。$(D\varphi)_x$ は任意の正数 ε にたいして、正数 δ を適当にえらぶと、

$$\|\, \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x) - (D\varphi)_x \Delta x \,\| \leqslant \varepsilon \,\|\, \Delta x \,\| \quad (\|\, \Delta x \,\| \leqslant \delta)$$

が満たされるような一次変換である。φ が C^1 級とは、$D\varphi$ が連続写像であるという意味である。なお $M(n, \mathbb{R})$ に値をとる関数 α にたいして、合成関数 $|\cdot| \circ \det \circ\, \alpha$ を略して $\left| \det \alpha \right|$ と書く。

U にふくまれる任意の (ルベーグ) 可測集合 A にたいし、(1) の f に $\chi_A \cdot f$ を代入することで、ただちに

$$\int_A f\, d\mu = \int_{\varphi^{-1}(A)} (f \circ \varphi) \left| \det D\varphi \right|\, d\mu \tag{2}$$

を得る。(2) に $f=1$ を代入すると

$$\mu(A)=\int_{\varphi^{-1}(A)}|\det D\varphi|\,d\mu. \tag{3}$$

■可測集合の変換　はじめに次の定理を証明しておく。

定理 1. $U,V\subset\mathbb{R}^n$ を開集合とし、$\varphi:V\to U$ を C^1 級写像とする。$N\subset V$ がルベーグ測度 0 ならば、$\varphi(N)$ もまたルベーグ測度 0。

証明 $V=\bigcup_{i=1}^{\infty}K_i,\ K_{i-1}\subset(K_i)^{\mathrm{o}}$ となるようなコンパクト集合 K_i の列を考えると、$N=\bigcup_{i=1}^{\infty}N\cap K_i$, $\varphi(N)=\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi(N\cap K_i)$。ここからわかるように、$\overline{N}$ があるコンパクト K の内部に含まれると仮定して証明しても一般性を失わない。
K はコンパクトだから、ある正数 M があって $\|(D\varphi)_x\|\leqslant M\ (\ x\in K)$ がなりたっている。
ε を任意の正数とし、$\{B_i\}$ を立方体の列で、

$$N\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}B_i,\quad B_i\subset K,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)<\frac{\varepsilon}{M^n}$$

をみたすものとする。x_i,δ_i をそれぞれ B_i の中心、半径とすると、微分法の平均値定理により

$$\|\varphi(x)-\varphi(x_i)\|\leqslant M\|x-x_i\|\leqslant M\delta_i\quad(x\in B_i).$$

すなわち $\varphi(B_i)$ は $\varphi(x_i)$ を中心とする半径が $M\delta_i$ の閉立方体 A_i にふくまれる。$\mu(A_i)=M^n\mu(B_i)$ だから、

$$\varphi(N)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}\varphi(B_i)\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,\quad \sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=M^n\sum_{i=1}^{\infty}\mu(B_i)<\varepsilon.$$

したがって $\varphi(N)$ は測度 0。 □

定理 2. $U,V\subset\mathbb{R}^n$ を開集合とし、$\varphi:V\to U$ を C^1 級同型写像とする。このとき、$B\subset V$ がボレル可測 (ルベーグ可測) ならば $\varphi(B)$ もボレル可測 (ルベーグ可測)。

証明 B がボレル可測ならば明らかに $\varphi(B)$ もボレル可測である。B がルベーグ可測ならば、あるボレル可測集合 B_0 と測度 0 集合 N とをもちいて、$B=B_0\,\triangle\,N$ のかたちに書ける。$\varphi(B)=\varphi(B_0)\,\triangle\,\varphi(N)$ で、定理 1 により $\varphi(N)$ は測度 0 だから $\varphi(B)$ はルベーグ可測。 □

■一次変換のばあい　われわれはまず (3) を φ が正則一次変換 $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ の場合において成りたつこと、すなわち

$$\mu(A)=\int_{\varphi^{-1}(A)}|\det L|\,d\mu=|\det L|\,\mu\left(\varphi^{-1}(A)\right)$$

を示そう。
　$B=\varphi^{-1}(A)$ とおけば、これは下の式 (4) のかたちをとる。

定理 3. $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ を 正則一次変換とする。このとき $\mathbb{R}^n$ の任意の可測集合 B にたいして

$$\mu(L(B))=|\det L|\,\mu(B) \tag{4}$$

が成りたつ。

証明 正則な L は次のタイプの一次変換 (基本行列とも呼ばれる) P, Q, R の積のかたちに書けることに注意する。

$$P = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \qquad Q = \begin{bmatrix} 0 & & 1 & \\ & \ddots & & \\ 1 & & 0 & \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} 1 & c & & & \\ 0 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

ここで省略した「$\cdots$」の対角成分はすべて 1、空白部分はすべて 0 であるとする。P の λ は $\lambda \neq 0$ とする。Q の 1 は、ある $i > 1$ にたいして $(1, i)$ と $(i, 1)$ 成分にあることを示す。
B が矩形のばあい、$L = P, Q, R$ について (4) が成りたつことの証明は容易だから省略する。測度の加法性から B が基本集合のばあいにも成りたつことは明らか。
B が一般の可測集合で $\mu(B) < \infty$ のばあいは、任意の正数 ε にたいして、どのふたつもたがいに素な可算個の基本集合 $\{B_i\}$ で

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) < \mu(B) + \frac{\varepsilon}{|\det L|}$$

を満たすものがある。$L = P, Q, R$ とすると、各 B_i について $\mu(L(B_i)) = |\det L| \mu(B_i)$ が成りたつから

$$\begin{aligned} \mu(L(B)) &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(L(B_i)) = |\det L| \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B_i) \\ &< |\det L| \mu(B) + \varepsilon. \end{aligned}$$

ε は任意だったから、ここから

$$\mu(L(B)) \leqslant |\det L| \mu(B) \quad (L = P, Q, R) \tag{5}$$

が導かれる。この式はもちろん $\mu(B) = \infty$ でも成立する。正則一次変換 L にたいし B が可測なら $L(B)$ も可測であること、任意の正則一次変換が P, Q, R のタイプの変換の積であることに注意すると、(5) は任意の正則一次変換 L にたいしても成立することがわかる。したがって、また

$$\mu(B) = \mu\left(L^{-1}L(B)\right) \leqslant |\det L|^{-1} \mu(((L(B)))), \quad |\det L| \mu(B) \leqslant \mu(L(B)).$$

これと (5) とから (4) を得る。 □

■証明の方針　さて、われわれの目標とする式 (1) は、非負可測関数 f にたいして不等式

$$\int_U f\, d\mu \leqslant \int_V (f \circ \varphi) |\det D\varphi|\, d\mu \tag{6}$$

がなりたつことを示せば十分である。それは次のようにしてわかる。
　U 上の関数 f にたいして $\varphi^\sharp(f)$ を

$$\varphi^\sharp(f) = (f \circ \varphi) |\det D\varphi|$$

により定義される V 上の関数とする。

f が非負可測関数ならば $\varphi^\sharp(f)$ もしかりで、(6) は

$$\int f\,d\mu \leqslant \int \varphi^\sharp(f)\,d\mu$$

と簡潔にかける。対応 $\varphi \mapsto \varphi^\sharp$ に関し、以下の点に注意する。

1. $\psi : W \to V$ をまた別の C^1 同型とすると $(\varphi \circ \psi)^\sharp = \psi^\sharp \circ \varphi^\sharp$.
2. $\mathrm{id} : U \to U$ にたいして $\mathrm{id}^\sharp = \mathrm{id}$.

ここから

$$\int \varphi^\sharp(f)\,d\mu \leqslant \int (\varphi^{-1})^\sharp \circ \varphi^\sharp(f)\,d\mu = \int f\,d\mu$$

が分かる。すなわち (1) が任意の非負可測関数 f にたいして成り立ち、任意の可測関数 f は $f = f_+ - f_-$ (f_+, f_- は非負可測関数) のかたちに書けるから、(1) は任意の可積分関数 f にたいしてもなりたつ。

■不等式 (6) の証明　(6) を示すには、次の補題が基礎になる。

補題 4. B を $\overline{B} \subset V$ なる基本集合とする。このとき

$$\mu\left(\varphi(B)\right) \leqslant \int_B |\det(D\varphi)|\; d\mu \tag{7}$$

がなりたつ。

証明 タイピングの負担を軽減するため、以下では $D\varphi$ を α と書く。
(Step 1) $\overline{B}$ はコンパクトだから、正数 M, m があって、

$$\left\| {\alpha_x}^{-1} \right\| \leqslant M, \quad m \leqslant |\det \alpha_x| \tag{8}$$

がすべての $x \in \overline{B}$ にたいして成りたつ。
ε を任意の正数としよう。関数の一様連続性により、正数 δ をうまくえらんで

$$\| \alpha_x - \alpha_y \| \leqslant \frac{\varepsilon}{M}, \quad |\det \alpha_x - \det \alpha_y| \leqslant \varepsilon m \quad (x, y \in \overline{B}, \| x - y \| \leqslant \delta) \tag{9}$$

がみたされるようにすることができる。
(8), (9) から

$$\begin{aligned} \left\| {\alpha_x}^{-1}\alpha_y \right\| &\leqslant \left\| {\alpha_x}^{-1}\alpha_y - {\alpha_x}^{-1}\alpha_x \right\| + \left\| {\alpha_x}^{-1}\alpha_x \right\| \\ &\leqslant \left\| {\alpha_x}^{-1} \right\| \| \alpha_y - \alpha_x \| + 1 \\ &\leqslant \varepsilon + 1, \end{aligned} \tag{10}$$

$$\left| \frac{\det \alpha_x}{\det \alpha_y} \right| \leqslant \left| \frac{\det \alpha_x - \det \alpha_y}{\det \alpha_y} \right| + 1 \leqslant \varepsilon + 1, \quad |\det \alpha_x| \leqslant (1 + \varepsilon)\,|\det \alpha_y| \tag{11}$$

が導かれる。これらの不等式が $x, y \in \overline{B}$, $\| x - y \| \leqslant \delta$ にたいして成立している。
(Step 2) B をどの 2 つも互いに素な可算個の立方体 C_l の和のかたちに表すことができる:

$$B = \bigcup_{l=1}^{\infty} C_l.$$

x_l を C_l の中心、δ_l を C_l の半径としよう。ここで $\delta_l \leqslant \delta$ と仮定することができる。
l を任意にえらんで、以下ではこれをしばらく固定して議論しよう。写像 $\theta : V \to \mathbb{R}^n$ を

$$\theta = {\alpha_{x_l}}^{-1} \circ \varphi$$

により定義すると、

$$(D\theta)_x = {\alpha_{x_l}}^{-1} \cdot \alpha_x.$$

すると (10) により

$$\| (D\theta)_x \| \leqslant 1 + \varepsilon \quad (x \in C_l).$$

これと微分法の平均値の定理とから

$$\| \theta(x) - \theta(x_l) \| \leqslant (1+\varepsilon) \| x - x_l \| \leqslant (1+\varepsilon)\delta_l \quad (x \in C_l).$$

すなわち $\theta(C_l)$ は $\theta(x_l)$ を中心とする半径が $(1+\varepsilon)\delta_l$ の閉立方体にふくまれる。したがって

$$\mu\left(\theta(C_l)\right) \leqslant (1+\varepsilon)^n \mu\left(C_l\right).$$

ところが ${\alpha_{x_l}}^{-1}$ は一次変換だから、すでに 定理 3 において証明したように

$$\mu\left(\theta(C_l)\right) = \mu\left({\alpha_{x_l}}^{-1}(\varphi(C_l))\right) = |\det \alpha_{x_l}|^{-1} \mu\left(\varphi(C_l)\right)$$

が成り立つ。ゆえに

$$\mu\left(\varphi(C_l)\right) = |\det \alpha_{x_l}|\, \mu\left(\theta(C_l)\right) \leqslant (1+\varepsilon)^n |\det \alpha_{x_l}|\, \mu\left(C_l\right) \tag{12}$$

をえる。一方、 (11) により

$$|\det \alpha_{x_l}| \leqslant (1+\varepsilon) |\det \alpha_x| \quad (x \in C_l)$$

がなりたつから、

$$|\det \alpha_{x_l}|\, \mu\left(C_l\right) = \int_{C_l} |\det \alpha_{x_l}|\, d\mu \leqslant (1+\varepsilon) \int_{C_l} |\det \alpha|\, d\mu. \tag{13}$$

(12) と (13) とから

$$\mu\left(\varphi(C_l)\right) \leqslant (1+\varepsilon)^{n+1} \int_{C_l} |\det \alpha|\, d\mu \quad (l = 1, 2, \cdots)$$

が得られる。ここで l が任意のラベルだったことを思い出し、α を $D\varphi$ と書き直して、$l = 1, 2, \cdots$ にわたって左右の和をとれば

$$\mu\left(\varphi(B)\right) \leqslant (1+\varepsilon)^{n+1} \int_B |\det D\varphi|\, d\mu.$$

最後に $\varepsilon \to 0$ の極限をとれば (7) を得る。 □

補題 5. B を $\overline{B}$ がコンパクトで、$\overline{B} \subset V$ なるような可測集合とする。このときやはり (7) が成りたつ。

証明 F を基本集合で、$\overline{B} \subset F$, $\overline{F} \subset V$ をみたすようなものとする。ε を任意の正数としよう。$\overline{F}$ はコンパクトだから正数 δ があって、G が可測で、$G \subset \overline{F}$, $\mu(G) < \delta$ ならば

$$\int_G |\det D\varphi|\, d\mu < \varepsilon$$

がなりたっている。
そのような δ にたいし、$\{E_i\}$ をどのふたつもたがいに素な可算個の基本集合で、

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i, \quad E_i \subset \overline{F}, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i) < \mu(B) + \delta$$

をみたすようなものとする。すると $\varphi(B) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \varphi(E_i)$ だから、$E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ とおくと、補題 4 により

$$\mu(\varphi(B)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\varphi(E_i)) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \int_{E_i} |\det D\varphi|\, d\mu = \int_E |\det D\varphi|\, d\mu. \tag{14}$$

ところが $E \setminus B \subset \overline{F}$ で $\mu(E \setminus B) = \mu(E) - \mu(B) < \delta$ だから

$$\int_E |\det D\varphi|\, d\mu - \int_B |\det D\varphi|\, d\mu = \int_{E \setminus B} |\det D\varphi|\, d\mu < \varepsilon. \tag{15}$$

(14) と (15) から

$$\mu(\varphi(B)) \leqslant \int_B |\det D\varphi|\, d\mu + \varepsilon.$$

ε は任意だったから、ここからやはり (7) をえる。 □

補題 6. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を非負可測単関数で、$\operatorname{supp} f \subset U$ なるものとする。このとき (6) が成り立つ。

証明 補題 5 から明らか。 □

補題 7. $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ を非負可測関数とし、$\operatorname{supp} f$ がコンパクトで、$\operatorname{supp} f \subset U$ なるものとする。このとき (6) が成りたつ。

証明 f は非負可測単関数の増大列 $\{t_i\}$ をもちいて $f = \lim_{i\to\infty} t_i$ とかけるが、$A = \operatorname{supp} f$, $s_i = \chi_A \cdot t_i$ とおくとやはり $\{s_i\}$ は増大する非負可測単関数の列で、$f = \lim_{i\to\infty} s_i$ かつ $\operatorname{supp} s_i \subset A \subset U$ をみたす。よって補題 6 により

$$\int_U s_i\, d\mu \leqslant \int_V (s_i \circ \varphi)\, |\det D\varphi|\, d\mu \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

$i \to \infty$ の極限をとると、やはり (6) が得られる。 □

最後に f が一般の非負可測関数の場合、$\{K_i\}$ をコンパクト集合の増大列で、$U = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ なるものとする。$f_i = f \cdot \chi_{K_i}$ とおけば、$\{f_i\}$ は非負可測関数の増大列で、$f = \lim_{i\to\infty} f_i$ である。しかも $\operatorname{supp} f_i \subset U$ はコンパクトである。ゆえに補題 7 により

$$\int_U f_i\, d\mu \leqslant \int_V (f_i \circ \varphi)\, |\det D\varphi|\, d\mu \quad (i = 1, 2, \cdots).$$

$i \to \infty$ の極限をとれば、(6) が得られる。証明終わり。

参考文献

[1] Paul R. Halmos, *Measure Theory*, Springer Verlag, New York, 1974

[2] Lynn H. Loomis and Shlomo Sternberg, *Advanced Calculus Rev. Ed.*, Jones and Bartlett Publ. Inc., Boston, 1990

[3] 吉田洋一, ルベグ積分入門, 培風館, 1965